

Analysis.

Funktionentheorie:

Biggeri, Carlos: Über die singulären Punkte analytischer Funktionen. Rev. Un. Mat. Argent. **1**, 5—8 (1936); **2**, 22 (1938) [Spanisch].

Biggeri, Carlos: Über die singulären Punkte der analytischen Funktionen. An. Soc. Sci. Argent. **127**, 430—431 (1939) [Spanisch].

Für den Inhalt der ersten Note vgl. dies. Zbl. **16**, 64, für den der dritten **16**, 33; Verf. polemisiert in dieser gegen die „von der Redaktion ohne sein Wissen“ vorgenommene Veröffentlichung der zweiten Note, die verstümmelt sei. *Ulrich* (Gießen).

Hibbert, Lucien: La notion de cassure au point singulier essentiel des courbes d'égal module et d'égal argument. C. R. Acad. Sci., Paris **210**, 499—501 (1940).

Die Funktion $w = w(z)$ sei für alle z bis auf die im Endlichen gelegene wesentlich singuläre Stelle $z = a$ eindeutig analytisch. Früher angegebene Ergebnisse über den Verlauf der Kurven $\log |w(z)| = \text{konst.}$, $\arg w(z) = \text{konst.}$ in der Umgebung der wesentlich singulären Stelle $z = a$ und über die Struktur der durch diese Niveaulinien bestimmten Gebiete werden in der vorliegenden Note vervollständigt [C. R. Acad. Sci., Paris **209**, 287, 718, 783 (1939); dies. Zbl. **21**, 319]. *Wittich* (Göttingen).

Wolf, František: Ein Eindeutigkeitssatz für analytische Funktionen. Math. Ann. **117**, 383 (1940).

Es sei $f(z)$ im Einheitskreis regulär und es gebe eine Punktmenge $\mathfrak{M}(\theta)$ auf einem Kreisbogen (α, β) mit folgenden Eigenschaften: 1. Sie ist eine überall dichte G_δ Menge von (α, β) , d. h. Durchschnitt einer abzählbaren Folge offener Mengen. 2. Auf $\mathfrak{M}(\theta)$ ist $\lim_{r \rightarrow 1} |f(re^{i\theta})|$ endlich. 3. Es ist $\lim_{r \rightarrow 1} |f(re^{i\theta})| = 0$ fast überall in (α, β) .

Verf. beweist, daß dann $f(z) \equiv 0$. Der Beweis folgt ziemlich einfach aus 1., 2. und 3.; die sehr kurz zusammenfassende Darstellung würde aber durch Hinzufügung von nur sehr wenigen Worten viel an Klarheit gewinnen. *S. Stoilow* (Bukarest).

Carlson, Fritz: Sur les coefficients d'une fonction bornée dans le cercle unité. Ark. Mat. Astron. Fys. **27** A, Nr 1, 1—8 (1939).

Sei $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots$ für $|x| < 1$ regulär und $|f(x)| \leq 1$. Aus den bekannten, hierzu notwendigen und hinreichenden Koeffizientenbedingungen von Schur folgt $\alpha_2 \leq 1 - \alpha_0^2 - \frac{\alpha_1^2}{1 + \alpha_0}$ ($\alpha_n = |a_n|$). Verf. verallgemeinert diese Abschätzung. Es wird $\alpha_{2n+1} \leq 1 - \alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_n^2$ ($n = 0, 1, \dots$), und $\alpha_{2n} \leq 1 - \alpha_0^2 - \dots - \alpha_{n-1}^2 - \frac{\alpha_n^2}{1 + \alpha_0}$ ($n = 1, 2, \dots$). Die Gleichheitszeichen werden nur für gewisse rationale Funktionen vom Grade $2n+1$ bzw. $2n$ erreicht. Weiter ist

$$\alpha_n^2 \leq (1 - \alpha_0^2)(1 - \alpha_0^2 - \dots - \alpha_{n-1}^2),$$

wo das Gleichheitszeichen wieder für gewisse rationale Funktionen vom Grade n gilt. *V. Paatero* (Helsinki).

Robertson, M. S.: Typically-real functions with $a_n = 0$ for $n \equiv 0 \pmod{4}$. Bull. Amer. Math. Soc. **46**, 136—141 (1940).

Es sei $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ typisch reell in $|z| < 1$, d. h. in $|z| < 1$ regulär und dann und nur dann reell, wenn z reell ist. Der Verf. betrachtet nun den Fall $a_n = 0$ für $n \equiv 0(4)$. (Für den Fall $a_n = 0$, wenn $n \equiv 0(2)$ siehe dies. Zbl. **3**, 393). Bereits früher hatte er den Fall $a_n = 0$ für $n \equiv 0(p)$, p ungerade, erledigt. [Ann. of Math. (2) **40**, 339—352 (1939); dies. Zbl. **21**, 143.] Die Beweismethode ist die gleiche geblieben,

wenn auch mit Abweichungen. Es werden folgende Ungleichungen bewiesen:

- (1) $|a_n| + 2^{-3/2}[(n-2)|a_{2m}| + n|a_2|] \leq n, \quad m, n \text{ ungerade}, \quad n > 1,$
 (2) $|a_n| + 2^{-1/2}(n-1)|a_2| \leq n \quad n \equiv 1(2),$
 (3) $|a_n| + |a_2| \leq 2^{3/2}, \quad |a_2| \leq 2^{1/2}, \quad n \equiv 0(2).$

Das Gleichheitszeichen gilt für $f(z) = z(1 - 2^{1/2}z + z^2)^{-1}$. Daraus folgt: Ist $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ typisch reell in $|z| < 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n/n| = 1$, dann ist $f(z)$ ungerade.
 Edmund Hlawka (Wien).

Basilevitch, I.: Sur un théorème de Littlewood et Paley. Rec. math. Moscou, N. s. 6, 337—343 u. franz. Zusammenfassung 344 (1939) [Russisch].

Sei (1) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ regulär-schlicht im Einheitskreis, $f(0)=0$ und $f'(0)=1$. Ferner bezeichne $f_1(z)$ den geraden Teil von (1), d. h. $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$. Verf. verallgemeinert den Littlewood-Paleyschen Satz: „Es gibt eine Weltkonstante P so, daß für jede Funktion (1) mit (2) $a_{2n} = 0$, $|a_{2n+1}| \leq P$ gilt“, indem er die Voraussetzung (2) durch die allgemeinere $|a_{2n}| \leq A n^{-1/2-\varepsilon}$ ersetzt; P hängt dann von A und ε ab. Dies folgt unmittelbar aus den Sätzen: I. Aus $|f_1(z)| \leq A(1-|z|)^{-3/2+\varepsilon}$, ($|z| < 1$, $0 < \varepsilon (\leq 1/4)$) folgt (3) $|f(z)| < K(1-|z|)^{-1}$, ($|z| < 1$), wo K nur von A und ε abhängt. II. Es genüge (1) der Ungleichung (3). Dann ist $|a_n| \leq P$, wo P nur von K abhängt.

V. G. Avakumović (Beograd).

Unkelbach, Helmut: Über die Randverzerrung bei schlichter konformer Abbildung. Math. Z. 46, 329—336 (1940).

Sei $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär und $|f(z)| \leq 1$, $f(0) = 0$. Verf. hat früher (dies. Zbl. 18, 224) die Winkelderivierte D am Rande $|z| = 1$ abgeschätzt, falls $f'(0) = \rho e^{i\varphi}$ bekannt ist. In der vorliegenden Arbeit verschärft er die Abschätzung für den Fall, wo $f(z)$ weiter schlicht ist. Es wird $D \geq \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ und $D \geq e^{|\varphi|}$ ($-\pi < \varphi \leq \pi$). Die Abschätzungen

sind genau für gegebenes ρ bzw. φ . Der Beweis wird allerdings unter einer einschränkenden Voraussetzung über die Approximation von $f(z)$ auf dem Rande ausgeführt.

V. Paatero (Helsinki).

Cooke, Richard H.: On Taylor series for which $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = 1$. Tôhoku Math. J. 46, 319—327 (1940).

Nach einem bekannten Satze von Fabry ist $z = e^{i\alpha}$ eine singuläre Stelle von $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = e^{i\alpha}$ gilt. Hadamard [J. de Math. (4) 8, 109

(1892)] gab aber ein Beispiel an, welches dartut, daß auch dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n$ nicht notwendig existieren muß, wenn $f(z)$ auf $|z| = 1$ eine einzige Singularität besitzt. Hierzu beweist Verf. folgenden Satz: Ist $f(z)$ in der ganzen Ebene bis auf die in $z = 1$ gelegene Stelle regulär und sind in der dann möglichen Entwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n \{z/(1-z)\}^n$

die Koeffizienten e_n reell und nicht negativ, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = 1$ (*) erfüllt. — Nach

Narumi und Izumi [Jap. J. Math. 4, 21—27, 29—32, 243—249, 251—252 (1927)]

ist bei Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit der Eigenschaft (*) für $n \rightarrow \infty$ auf $|z| \geq r > 1$

gleichmäßig $s_n(z) \sim a_n z^{n+1}/(z-1)$, wenn $s_n(z)$ die n -te Partialsumme der Potenzreihe bedeutet. Dieser Satz wurde von den Autoren selbst a. a. O. und von Shimizu [Jap. J. Math. 4, 253—263 (1927)] verallgemeinert. Wird $f(z) = s_n(z) + R_n(z)$ gesetzt, so zeigt nun der Verf., daß an allen regulären Stellen von $f(z)$ für $n \rightarrow \infty$ $R_n(z) \sim a_n z^{n+1}/(1-z)$ ist, und zwar gleichmäßig auf $|z| \leq r < 1$. Analoge Sätze lassen sich auch für die Verallgemeinerungen aussprechen. — Schließlich beweist der Verf. über die Punkte der Berandung des Konvergenzkreises unter der engeren Voraus-

setzung $a_n/a_{n+1} = 1 + cn^{-1} + O(n^{-1})$ mit $c > 1$, daß $R_n(e^{i\alpha}) \sim a_n e^{(n+1)i\alpha}/(1 - e^{i\alpha})$ für $\alpha \neq 0$ und $R_n(1) \sim na_n/(c - 1)$ ist. Lammel (Prag).

Kamenetzky, I. M.: Sur l'indicatrice de la croissance d'une fonction entière du premier ordre et sur la distribution des singularités d'une fonction représentée par la série associée de Taylor. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **26**, 552—555 (1940).

$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ sei eine ganze Funktion von der Ordnung 1, dem Normaltypus A und Wachstumsindikator $h(\varphi)$; $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n-1}$ sei die Laplacesche Transformierte von $G(z)$ und $k(\varphi)$ die Stützfunktion des kleinsten konvexen Bereiches, in dessen Außenraum $g(z)$ überall regulär ist. Dann gilt $h(\varphi) = k(-\varphi)$ [vgl. G. Pólya, Math. Z. **29** (1929)]. Verf. betrachtet nun die Funktionenschar $G_t(z) = e^{tz} \cdot G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$, $c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{n-k} \cdot a_k$, $t = \lambda e^{i\alpha}$. Ihr Wachstumsindikator sei $h_t(\varphi)$ und ihr Typus $A(t) = A(\lambda, \alpha)$. Aus $h_t(\varphi) = h(\varphi) + \lambda \cos(\alpha + \varphi)$,

$$A(\lambda, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{n-k} \cdot a_k \right|}, \quad t = \lambda e^{i\alpha},$$

und einfachen geometrischen Überlegungen folgt: Die Richtungen des stärksten Anwachsens von $G(z)$ fallen zusammen mit jenen Richtungen α' , für welche $(1) A(\lambda, \alpha) = A + \lambda$ identisch in λ erfüllt ist. In Verbindung mit dem Resultat von Pólya ergibt sich daraus folgendes Kriterium für die Lage der Singularitäten auf dem

Konvergenzkreis: $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n-1}$ ist dann und nur dann in der Richtung $-\alpha$ auf dem Konvergenzkreis singulär, wenn (1) für jedes λ erfüllt ist. Pfluger.

Robinson, Raphael M.: On numerical bounds in Schottky's theorem. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 907—910 (1939).

Durch eine sehr einfache Schlußweise kann unter geschickter Benutzung von konformer Abbildung das asymptotische Verhalten der Schranken im Schottkyschen Satz günstig gefaßt werden, welches durch das Wachstum von $f(0) = a \rightarrow \infty$ bedingt wird. Ist $f(z) = a + \dots$ und wird für $|z| = r < 1$ mit $K(a, r)$ die beste Schranke im Schottkyschen Satz bezeichnet, so gilt für $8|a| - 10 > 0$ die Schätzung

$$\{8|a| - 10\}^{(1+r):(1-r)} - 10 < 8K(a, r) < \{8|a| + 10\}^{(1+r):(1-r)} + 10.$$

Ulrich (Gießen).

Lewin, B.: Über einige arithmetische Eigenschaften der holomorphen Funktionen. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. **15**, Nr 2, 43—49 u. deutsch. Zusammenfassung 50 (1938) [Ukrainisch].

Es werden arithmetische Eigenschaften derjenigen um den Nullpunkt regulären Funktionen $f(z)$ untersucht, für die $f(1/q^k) = m/q^{\Psi(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$) ist, wobei q und m ganze Zahlen sind und $\Psi(k)$ eine ganzzahlige Funktion bedeutet. Verf. beweist unter anderen: I. Sei s eine ganze Zahl, $a(k)$ eine beschränkte ganzzahlige Funktion und $\Psi(k) \leq \frac{k(k-1)}{2} + sk + a(k)$. Dann ist $f(z)$ entweder ein Polynom oder besitzt eine singuläre Stelle im Kreise $|z| = q^s$. Daraus wird gefolgert: Wenn $\Psi(k) \leq \frac{k(k-1)}{2} - k\varphi(k)$, wo $\varphi(k) \rightarrow \infty$ bei $k \rightarrow \infty$, so ist $f(z)$ ein Polynom. II. Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion von der Ordnung ϱ bzw. vom Typus A . Es sei ferner $\Psi(k) \leq \frac{k(k-1)}{2} + (k-1)\vartheta(k-1)$, wo $\vartheta(k)$ eine ganzzahlige Funktion ist. Dann ist

$$1/\varrho \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(n)}{\ln n} \ln q \quad \text{bzw.} \quad \ln A \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} [\ln n - \varrho \vartheta(n) \ln q - \ln(\varrho e)].$$

III. Es seien n und N zwei feste Zahlen, $q'_k < Nq^{nk}$ und $f(1/q^k) = m'/q'_k$. Es seien ferner $f^{(\nu)}(0)$ ($\nu = 0, 1, \dots, 2n - 2$) rationale Zahlen. Dann ist $f(z)$ eine rationale Funktion, deren Ordnung $\leq n$ ist. V. G. Avakumović (Beograd).

Lammel, Ernst: Über Approximation regulärer Funktionen eines komplexen Argumentes durch rationale Funktionen. Math. Z. **46**, 104—116 (1940).

Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen für die Polstellenfolge b_1, b_2, \dots einer Folge rationaler Funktionen

$$R_n(z) = (z - a)^n : (z - b_1)(z - b_2) \dots (z - b_n)$$

derart, daß jede in einem Jordangebiet \mathfrak{G} regulär analytische Funktion $f(z)$ durch Reihen der Form $\sum A_n R_n(z)$ gleichmäßig innerhalb \mathfrak{G} (d. h. auf jedem abgeschlossenen Teilbereich) dargestellt werden kann; die Entwicklung ist formal eindeutig bestimmt. Die Pole werden auf dem Jordanrand von \mathfrak{G} angenommen; bei schlichter Abbildung von \mathfrak{G} in den Einheitskreis, mit $a \leftrightarrow 0$, müssen die Bilder der b_n im Sinne von Weyl gleichverteilt sein. Statt dessen gibt Verf. auch eine unmittelbare Form der Bedingung in Limesgestalt. Ulrich (Gießen).

Hille, Einar: Sur les séries associées à une série d'Hermite. C. R. Acad. Sci., Paris **209**, 714—716 (1939).

Verf. untersucht das Konvergenz- und Regularitätsverhalten der Funktion $f(z) = \sum_0^\infty f_n h_n(z)$, wobei $h_n(z)$ die n -te Hermite'sche Funktion $h_n(z) = e^{-\frac{1}{2}z^2} H_n(z)$ $= (-1)^n e^{\frac{1}{2}z^2} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z^2})$ ist. Es werden (ohne Beweise) unter anderem folgende Ergebnisse veröffentlicht: Für nicht reelles z konvergiert $f(z)$ überall dort und nur

dort, wo die zugeordneten Reihen $C(z) = \sum_0^\infty f_n A_n \cos \left[z \sqrt{2n+1} - n \frac{\pi}{2} \right]$ und $S(z) = \sum_0^\infty f_n A_n \sin \left[z \sqrt{2n+1} - n \frac{\pi}{2} \right]$ konvergieren, wobei $A_{2n} = |H_{2n}(0)|$ und

$A_{2n+1} = (4n+3)^{-1/2} |H'_{2n+1}(0)|$ ist; im Streifen $-\tau < y < \tau$ konvergiert $f(z)$ (ebenso wie $C(z)$ und $S(z)$) absolut und divergiert für $|y| > \tau$; dabei ist $\tau = -\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)^{-1/2} \lg(A_n |f_n|)$. — Die singulären Stellen und das Regularitätsgebiet von $f(z)$ werden durch eine Dirichletreihe, die der Funktion $f(z)$ zugeordnet wird und für deren Definition ich auf die Originalnote verweise, untersucht. Es ergibt sich, daß $f(z)$ regulär in C ist, wobei C der Durchschnittsbereich der vier „Sterne“ $\pm C^\pm$ der Funktionen

$$E^+(z) = \sum_0^\infty f_n A_n \exp \left[i \left(z \sqrt{2n+1} - n \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

bzw.

$$E^-(z) = \sum_0^\infty f_n A_n \exp \left[-i \left(z \sqrt{2n+1} - n \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

ist. Die genannte Zuordnung führt zu dem Versuch, auf die Existenz der singulären Stellen von $f(z)$ aus denjenigen von $E^+(z)$ bzw. $E^-(z)$ zu schließen; dies ist aber im allgemeinen nicht möglich. Als Beispiel eines Falles, wo dies doch durchführbar ist, gibt Verf. folgenden Lückensatz an: Die Folge n_k genüge einer der drei Bedingungen: I. $n_k(k \lg k)^{-2} \rightarrow \infty$; II. $n_k k^{-2} \rightarrow \infty$, $\inf(n_{k+1} - n_k) n_k^{-1/2} > 0$; III. $n_k k^{-2} \rightarrow \infty$, $(n_{k+1} - n_k) n_k^{-1/2} > e^{-\varepsilon w(n)}$, $w(n) = \inf_{m > n} n_m m^{-2}$, $n > n(\varepsilon)$. Dann ist die durch $\sum_{k=1}^\infty f_{n_k} h_{n_k}(z)$ definierte Funktion nicht über ihren Konvergenzstreifen fortsetzbar.

V. G. Avakumović (Beograd).

Montel, Paul: Sur les suites de fonctions non bornées dans leur ensemble. Bull. Soc. Math. France **67**, 42—55 (1939).

Sei \mathfrak{B} ein fester Bereich, $f(z)$ dort regulär analytisch und $M(f)$ sein Maximum

auf \mathfrak{B} . Eine Funktionenschar, deren Maximalbeträge $M(f)$ nicht gleichmäßig beschränkt sind, ist im allgemeinen nicht normal auf \mathfrak{B} . Ist indes für die zugeordnete Normalschar $\varphi(z) = f(z) : M(f)$ die Konstante 0 als Grenzfunktion ausgeschlossen, so ist auch $f(z)$ normal auf \mathfrak{B} oder quasinormal (je nachdem es nur Grenzfunktionen $\Phi(z)$ der $\varphi(z)$ gibt, die nullstellenfrei sind oder nicht). Ähnliches gilt, wenn man das Betragmaximum $M(f)$ durch die Hardyschen Mittelwerte

$$M_p(r, f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\vartheta})|^p d\vartheta \right\}^{1/p}$$

ersetzt oder durch die in der älteren Theorie der ganzen Funktionen vielfach betrachteten Extrema des Realteils $\Re f(z)$ oder durch den neuerdings wichtigeren Flächeninhalt der Bildfläche über der ω -Ebene, der ω -Kugel, oder auch nur seiner schlichten Projektion (Inhalt der Menge der belegten Stellensorten). — In all diesen Fällen kann aus einer Annahme wie $|f(z_0)| > \delta M(f)$ für alle f und festes z_0 und $\delta > 0$ darauf geschlossen werden, daß in einer Kreisscheibe um z_0 eigentliche Normalität vorliegt; ihre Größe kann bestimmt und durch Beispiele als genau belegt werden. — Den Schluß bilden ähnliche Kriterien an Hand der Ableitungen $f^{(p)}(z)$ und ihrer Maxima $M^{(p)}(f)$. Sei $|f(z_0)| > \delta M^{(p)}(f)$. Jede Folge $f(z)$ ist quasinormal von der Ordnung $p - 1$, wenn die $M^{(p)}(f)$ beschränkt bleiben, und von beliebiger Ordnung, wenn diese unbeschränkt sind.

Ullrich (Gießen).

Blanc, Charles: Une interprétation élémentaire des théorèmes fondamentaux de M. Nevanlinna. Comment math. helv. 12, 153—163 (1940).

Die Nevanlinnasche Wertverteilungslehre ruht in ihren Beweisen auf den Eigenschaften der harmonischen Funktionen. Verf. zeigt, daß davon die Mittelwertseigenschaft gegenüber jeder umschließenden Kurve allein hinreicht, um die Hauptsätze der Wertverteilungslehre zu begründen; das wird an einem „diskontinuierlichen“ Seitenstück dieser Theorie ausgeführt: es werden Funktionen betrachtet, die nur in den Ecken eines Gitters erklärt sind, das von p festen Strahlen aus dem Ursprung O und einer unendlichen Kreisfolge C_n um O gebildet ist; darunter sind solche als „harmonisch“ hervorgehoben, deren Wert in jedem Gitterpunkt gleich dem arithmetischen Mittel der Werte in allen unmittelbar benachbarten Gitterpunkten ist. Sie zeigen minimale quadratische Mittel; Seitenstücke der Formeln von Green, über Schmiegungs-, Anzahlfunktion und Charakteristik (Hauptsätze) und des Picardschen Satzes folgen.

Ullrich (Gießen).

Laurent-Schwartz: Sur une propriété de la fonction $m(r, A)$ de M. Nevanlinna dans les fonctions méromorphes. C. R. Acad. Sci., Paris 210, 525—526 (1940).

Der Satz von Collingwood-Teichmüller wird wiedergefunden: $m(r, A) \leq \text{konst.}$ für Stellensorten A , wo höchstens algebraische Windungspunkte einer Blattzahl $\leq \lambda$ vorkommen. Die Untersuchung Teichmüllers [Dtsch. Math. 2, 96—107 (1937); dies. Zbl. 16, 266] ist ignoriert. Teichmüllers direkte Schlüsse mit Hilfe einer Anwendung des Verzerrungssatzes werden durch qualitativ bequeme Stützung auf Normalscharen ersetzt.

Ullrich (Gießen).

Milloux, Henri: Sur la théorie des défauts. C. R. Acad. Sci., Paris 210, 38—39 (1940).

Der Ref. hat vor mehr als 10 Jahren eine Ungleichung angegeben, die die Charakteristik einer meromorphen Funktion f nach unten abschätzt (und zugleich den II. Hauptsatz — bis auf einen trivialen Zusatz betr. die obere Abschätzung — enthält); vgl. S.-B. Preuß. Akad. Wiss. 1929. — Verf. findet diese Ungleichung und einige ihrer unmittelbaren Folgen wieder. Darüber hinaus iteriert er sie, indem er auch höhere Ableitungen ins Spiel bringt, und mißt die Wertverteilung von $f^{(n)}$ an der Charakteristik von f (relative Defekte) oder $f^{(n)}$ (absolute Defekte). Z. B. zeigt sich dann: Hat $f(z)$ Defekte mit $\delta(\infty) = 1$, $\sum_{a \neq \infty} \delta(a) = 1$, so kann $f'(z)$ keinen Nevanlinnaschen Ausnahmewert $\neq 0, \infty$ haben; das ergänzt wieder Sätze des Referenten. Ullrich (Gießen).

Tsuji, Masatsugu: On a positive harmonic function in a half-plane. Jap. J. Math. 15, 277—285 (1939).

$u(z)$ sei positiv harmonisch in der rechten Halbebene $x > 0$. Verf. beschäftigt sich im Anschluß an Dinghas (dies. Zbl. 18, 262) auf Grund einer vereinheitlichenden Beweisanordnung mit der Darstellung

$$u(z) = \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\theta(s)}{|z - is|^2} ds + cx,$$

wo $\theta(s)$ eine bei geeigneter Normierung eindeutig bestimmte Belegung ist, und schließt daran neue Beiträge über das Verhalten von $\frac{m(r)}{r}$, mit

$$m(r) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} u(re^{i\varphi}) \cos \varphi d\varphi; \quad \text{z. B. ist} \quad \frac{m(r)}{r} = \int_r^{\infty} \frac{\chi(s)}{s^3} ds + \frac{\pi}{2} c$$

darstellbar, mit $\chi(s) = \theta(s) - \theta(-s)$; $\frac{m(r)}{r}$ nimmt mit wachsendem r monoton ab, ist konkav in $\frac{1}{r^2}$, hat rechts- und linksseitige Ableitungen $m'_+(r)$ und $m'_-(r)$ (die bei $s = r$ dann und nur dann übereinstimmen, wenn $\chi(s)$ bei $s = r$ stetig ist). Es gilt für $r \rightarrow \infty$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r)}{r} = \lim m'_+(r) = \lim m'_-(r) = \frac{\pi}{2} c.$$

Auch ein Satz über die harmonische Fortsetzung von $u(z)$ hängt mit $m'_\pm(r)$ zusammen. Ullrich (Gießen).

Lindemann †, F.: Zur Theorie der konformen Abbildung. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1939, 27—67 (H. 1/2).

Die konforme Abbildung eines gradlinigen Polygons \mathfrak{P}_z der $z = x + iy$ -Ebene mit den Ecken a_j und den Winkeln α_j auf die Halbebene $\mathfrak{Z} Z > 0$, $Z = X + iY$, wird nach Schwarz-Christoffel durch eine Funktion $z = z(Z)$ vermittelt, die

(1) $\log \frac{dz}{dZ} = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n (\alpha_j - \pi) \log(Z - A_j) + \log C$ genügt; dabei bezeichnen die

Punkte A_j auf $Y = 0$ die Bilder der Polygonecken $z = a_j$. Durch Grenzübergang $|a_j - a_{j-1}| \rightarrow 0$ und $(\alpha_j - \pi) \rightarrow 0$ kann man aus dem Polygon eine einfache geschlossene, stetig gekrümmte Kurve Γ_z erhalten. Unter Benützung einer Rechnung von Pochhammer entsteht bei Ausführung des Grenzüberganges aus (1):

(2) $\log \frac{dz}{dZ} = -\frac{1}{\pi} \int \log(T - Z) d\varepsilon + C'$. Dabei ist T ein Punkt auf $Y = 0$, der einem Punkt $\zeta = \xi + i\eta$ von Γ_z entspricht; $d\varepsilon$ bezeichnet den Kontingenzwinkel bezüglich Γ_z . T läßt sich als Funktion $\varphi(\varepsilon)$ von ε auffassen. Betrachtet man dann noch ε als Funktion von ζ und ζ als Funktion von T , so ist schließlich das Integral in (2) ein Integral nach T von $T = -\infty$ bis $T = +\infty$. Wird in

$$\log \frac{dz}{dZ} = -\frac{1}{\pi} \int \log(\varphi(\varepsilon) - Z) d\varepsilon + C' \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dZ} \log \frac{dz}{dZ} = \frac{1}{\pi} \int \frac{d\varepsilon}{\varphi(\varepsilon) - Z}$$

$\varphi(\varepsilon)$ passend bestimmt, so leistet die durch diesen Ausdruck gegebene Funktion $z = z(Z)$ die gewünschte konforme Abbildung zwischen $\mathfrak{Z} Z > 0$ und dem von Γ_z berandeten einfach zusammenhängenden Gebiet \mathfrak{G}_z . Für $\varphi(\varepsilon)$ wird eine Differentialgleichung aufgestellt, deren allgemeine Lösung durch $\varphi(\varepsilon) = \alpha(\xi - i\eta) + \beta = \alpha \int \frac{ds}{ds} e^{-i\varepsilon} d\varepsilon + \beta$, α und β Integrationskonstanten, gegeben ist. Damit ist die Aufgabe, die konforme Abbildung zwischen $\mathfrak{Z} Z > 0$ und \mathfrak{G}_z zu bestimmen, auf die Lösung von

$$\frac{d}{dZ} \log \frac{dz}{dZ} = \frac{1}{\pi} \int \frac{d\varepsilon}{\alpha(\xi - i\eta) + \beta - Z},$$

d. h. auf Quadraturen zurückgeführt. Verschiedene Ergänzungen zu diesen Überlegungen ergeben sich bei der Anwendung der Methode auf spezielle Gebiete \mathfrak{G}_z :

Kreis, Ellipse, Kreisbogensichel, Kreisbogendreieck und Kreisbogenpolygon. So erfordert z. B. die Behandlung der letzten Gebiete eine zusätzliche Betrachtung über den Einfluß von Ecken auf der Kurve Γ_z . Wittich (Göttingen).

Khajalia, G. J.: Sur la théorie de la représentation conforme des domaines doublement connexes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **26**, 550—551 (1940).

Die Kreisringabbildung eines zweifach zusammenhängenden Gebiets \Re wird durch Polynome in z und $\frac{1}{z}$, $P_n(z) = \sum_{\nu=-n}^{+n} a_\nu z^\nu$, angenähert, welche bei festem n das Integral $J = \iint |\Gamma'(z)|^2 d\sigma$, über \Re erstreckt, möglichst klein machen. Die Normierung erfolgt durch eine Grenzvorschrift über die innere Randkurve. Sätze ohne Beweis. Ullrich.

Heins, Maurice H.: Extremal problems for functions analytic and single-valued in a doubly-connected region. Amer. J. Math. **62**, 91—106 (1940).

Die bisher bekannten allgemeingültigen Schranken der harmonischen Maßtheorie sind nur bei einfach zusammenhängenden Gebieten scharf, werden aber bei eindeutigen Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten unzulänglich. Es wird eine Methode angegeben, die im Falle des zweifachen Zusammenhangs zu scharfen Schranken zugleich mit typischen Extremalfunktionen führt. Sie stützt sich naturgemäß auf Uniformisierung zusammen mit der Pick-Nevanlinnaschen Interpolationstheorie, die für den vorliegenden Fall durchgeführt wird. Einige schon bekannte Aussagen, z. B. der Aumann-Carathéodorysche Starrheitssatz, lassen sich einordnen.

Ullrich (Gießen).

Possel, René de: Sur la représentation conforme d'un domaine à connexion infinie sur un domaine à fentes parallèles. J. Math. pures appl., IX. s. **18**, 285—290 (1939).

Es wird ein unmittelbarer Existenzbeweis zum Parallelschlitztheorem geführt, der auf die Extremaleigenschaft des Koeffizienten a_f in

$$w(z) = z + \frac{a_f}{z} + \dots$$

zielt, aber — im Gegensatz zur früheren Beweisanordnung — den Riemannschen Abbildungssatz als Vorstufe meidet. Ullrich (Gießen).

Teichmüller, Oswald: Erreichbare Randpunkte. Deutsche Math. **4**, 455—461 (1939).

Strenge Begründung und Berichtigungen der Bieberbachschen Darstellung der Theorie der erreichbaren Randpunkte einer Überlagerungsfläche F der komplexen Zahlenebene (Funktionentheorie II, 1. Aufl.). Eine andere, auf einer weniger ausgiebigen Identifizierung der definierenden Wege beruhende Erklärung für den Begriff des erreichbaren Punktes ist vom Ref. gegeben, im allgemeinen Fall, wo die abstrakte Fläche F eine andere gegebene abstrakte Grundfläche \bar{F} überlagert (dies. Zbl. **20**, 29).

Rolf Nevanlinna (Helsinki).

Mandelbrojt, S.: Sur les fonctions indéfiniment dérivables. Acta math. **72**, 15—29 (1940).

Es wird folgender Hauptsatz bewiesen: „Jede in einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall unbeschränkt differenzierbare Funktion ist daselbst als Summe zweier Funktionen vom stark quasianalytischen Typ darstellbar“; er ist etwas schärfer als der in der zugehörigen Voranzeige gegebene [C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 1780—1783 (1939); dies. Zbl. **22**, 155, woselbst die Bezeichnungen erklärt sind]. Die Zerlegung $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ wird durch eine geeignete Aufteilung der Koeffizienten a_n in der Reihenentwicklung nach Tschebyscheffschen Polynomen $T_n(x)$ ($T_n(\cos \vartheta) = \cos n\vartheta$; $-1 \leq x \leq 1$) in zwei Klassen bewerkstelligt: $a_n = b_n + c_n$, wo stets b_n oder c_n verschwindet, und dann $F_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_n(x)$, $F_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n(x)$. Ist dann z. B.

$M_p = \max_{-1 \leq x \leq 1} |F_1^{(p)}(x)|$, so wird gezeigt 1) $\lg M_p$ konvex in p , 2) $\int \frac{\lg T(r)}{r^2} dr$ divergiert, wenn wie üblich $T(r) = \max_{p \geq 1} \frac{r^p}{M_p}$ gesetzt wird; aus 2) folgt die Quasianalytizität

der Klasse $\{M_p\}$, und daraus, da 1) besagt, daß die Folge M_p mit der zugehörigen geglätteten M_p^0 (siehe folgendes Referat) übereinstimmt, die Denjoysche Bedingung für M_p , damit der Satz. Herm. Schmidt (Jena).

Cartan, H., et S. Mandelbrojt: Solution du problème d'équivalence des classes de fonctions indéfiniment dérivables. Acta math. 72, 31—49 (1940).

In Verallgemeinerung einer bekannten Hadamard-Denjoyschen Definition wird hier einer Folge positiver Zahlen A_n und einem gegebenen Intervall I (das nicht abgeschlossen und nicht beschränkt zu sein braucht) als „Klasse $\{A_n\}_I$ “ die folgendermaßen charakterisierte Menge in I unbeschränkt differenzierbarer Funktionen zugeordnet: zu jedem $x_0 \in I$ soll es eine Umgebung $U(x_0)$ und eine positive Zahl λ geben, so daß $|f^{(n)}(x)| < \lambda^n A_n$ für $n = 1, 2, \dots$ und alle $x \in I \cdot U(x_0)$. Es handelt sich um die Frage, wann zwei solche Klassen zusammenfallen, oder allgemeiner, eine in der anderen enthalten ist: $\{A_n\}_I \subseteq \{A'_n\}_I$. Anschließend an ein früheres Ergebnis von Mandelbrojt, betreffend den Fall $\{A'_n\}_I = \{n!\} =$ Klasse der analytischen Funktionen, wird gezeigt, daß hierfür in einem beschränkten offenen Intervall notwendig und hinreichend ist:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n^{0,1}}{A'_n} \right) < \infty$; hierbei entsteht die Folge A_n^0 durch eine gewisse „Glättung“ (Konstruktion des nach unten konvexen Newtonschen Polygons zu der Punktmenge $(n, \lg A_n)$) aus A_n , und dabei bleibt die Klasse unverändert. Im Falle eines halboffenen oder abgeschlossenen Intervalls ist die Bedingung zu verschärfen: an Stelle von A_n^0 tritt eine Folge A_n , die durch Anwendung des nämlichen Glättungsprozesses auf $B_n = \sqrt[n]{n^n A_n}$ hervorgeht. Herm. Schmidt (Jena).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik:

Cantelli, F. P.: Osservazioni sulla nota „Su una teoria astratta del calcolo delle probabilità e sulla sua applicazione al teorema detto „delle probabilità zero e uno“. Giorn. Ist. Ital. Attuari 11, 101—106 (1940).

Verf. dehnt den Inhalt seiner in der Überschrift genannten Arbeit [Giorn. Ist. Ital. Attuari 10, 1—9 (1939); dies. Zbl. 21, 421] auf den allgemeinsten Fall aus, in welchem n Werte der ersten n Zufallsvariablen mit der Eigenschaft II nur „im allgemeinen verträglich“ sind, d. h. in welchem zwar jeder von ihnen mit II verträglich ist, aber nicht notwendig die unendliche Folge der Werte. M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Stevens, W. L.: Solution to a geometrical problem in probability. Ann. of Eugen. 9, 315—320 (1939).

Auf einem Kreise vom Umfang l werden n Bögen von der Länge x zufallsmäßig verteilt, wobei sie sich ganz oder teilweise überdecken dürfen. Dadurch zerfällt der Kreisumfang abwechselnd in bedeckte Abschnitte und in dazwischenliegende Lücken. Verf. berechnet die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl dieser Lücken in Abhängigkeit von x und n . Beispielsweise tritt bei $n = 16$ und $x = 0,2$ mit der Wahrscheinlichkeit 0,4929 keine Lücke auf. Hans Münzner (Göttingen).

Țițeica, Șerban: Sur un problème de probabilités. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 10, 57—64 (1939).

Es wird die für die Frage der Bakteriophagie wichtige Wahrscheinlichkeit q dafür untersucht, daß jede von P Klassen, auf die man rein zufallsmäßig N untereinander gleiche Objekte verteilt hat, wobei jeder Klasse die konstante Zuteilungswahrscheinlichkeit $\frac{1}{P}$ zukommt, höchstens $n - 1$ dieser Objekte enthalte. Für $N \leq n - 1$ ist $q = 1$, für $N > (n - 1)P$ ist $q = 0$, für $n - 1 < N \leq (n - 1)P$ ist

$$q = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_P} \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_P!} \cdot \frac{1}{P^N},$$

wobei die Summe über alle natürlichen Zahlen n_i mit

$$0 \leq n_i \leq n-1 \quad (i=1, 2, \dots, P); \quad n_1 + n_2 + \dots + n_P = N$$

zu erstrecken ist. Durch Identifizierung von q mit dem Koeffizienten von z^N in der Potenzreihenentwicklung der analytischen Funktion

$$\frac{N!}{P^N} \cdot [f(z)]^P = \frac{N!}{P^N} \cdot \left[1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \right]^P$$

und Anwendung der Sattelpunktmethode auf das in der Cauchyschen Integralformel auftretende Integral $\int [f(z)]^P \frac{dz}{z^{N+1}}$ erhält Verf. die Näherungsformel:

$$q = \sqrt{\frac{N}{P \cdot F_2(x)}} \cdot \left(\frac{N}{P \cdot e \cdot x} \right)^N \cdot [f(x)]^P,$$

wo $F_2(z) = z \cdot F_1'(z)$, $F_1(z) = \frac{z \cdot f'(z)}{f(z)}$ und x die einzige positiv reelle Wurzel der Gleichung $\frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} = \frac{N}{P}$ ist. Für sehr kleine $x > 0$ gilt die auf weniger korrekte Weise auch direkt aus der Poissonverteilung ableitbare Näherung

$$q = \left[f\left(\frac{N}{P}\right) \cdot e^{-\frac{N}{P}} \right]^P.$$

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Jordan, Charles: *Problèmes de la probabilité des épreuves répétées dans le cas général.* Bull. Soc. Math. France **67**, 223—242 (1939).

Verf. leitet die bekannten Formeln für die Wahrscheinlichkeitsverteilung bei beliebig abhängigen Ereignissen ab, stellt die Beziehungen zwischen erzeugender Funktion, Momenten und Binomialmomenten dar und betrachtet endlich insbesondere die Fälle der Symmetrie und der Unabhängigkeit. Es werden mehrere Beispiele angeführt.

Bruno de Finetti (Trieste).

Doebelin, W.: *Sur un problème de calcul des probabilités.* C. R. Acad. Sci., Paris **209**, 742—743 (1939).

„Soit L une loi de probabilité, X_1, \dots, X_n n variables indépendantes suivant la loi L , $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Soient n_s une suite d'entiers croissants, a_s et b_s deux suites de nombres. Il se peut que les lois de probabilité des variables $a_s^2 S_{n_s} - b_s$ convergent si $s \rightarrow \infty$ vers une loi de probabilité J n'affectant pas une probabilité 1 à une valeur unique. Soit $E'[L]$ l'ensemble de toutes les lois J qu'on peut obtenir ainsi en faisant varier les suites n_s , a_s et b_s . $E'[L]$ n'est rien d'autre que l'ensemble dérivé de l'ensemble de puissances de la loi L . Dans les cas les plus simples $E'[L]$ contient uniquement la classe de la loi de Gauss.“ In dieser Voranzeige werden Mitteilungen über die Struktur von $E'[L]$ im allgemeinen Falle gemacht. *Kamke.*

Lévy, Paul: *Sur une loi de probabilité analogue à celle de Poisson et sur un sous-groupe important du groupe des lois indéfiniment divisibles.* Bull. Sci. math., II. s. **63**, 247—268 (1939).

Die Verteilungsfunktion $v(x) = \frac{e^{-x} x^{t-1}}{\Gamma(t)}$, $x > 0$; $v(x) \equiv 0$, $x < 0$, in der t ein Parameter ist (Klasse L_t), besitzt die charakteristische Funktion $\varphi(z) = (1 - iz)^{-t}$. Aus der Form von $\varphi(z)$ ist unmittelbar ersichtlich, daß die Funktionen der Klasse L_t die Gruppeneigenschaft $\varphi_{t_1+t_2}(z) = \varphi_{t_1}(z) \varphi_{t_2}(z)$ haben. Nach der allgemeinen Theorie der unbeschränkt teilbaren Gesetze läßt sich für $t = 0$ für die charakteristische Funktion $\varphi(z)$ die Darstellung $\ln \varphi(z) = \int_0^\infty (e^{izu} - 1) e^{-u} \frac{du}{u}$ angeben. Man kann dann eine weitere Gruppe von Verteilungsgesetzen G'_1 durch

$$\ln \varphi(z) = \int \sum_0^\infty t_\gamma (e^{i\lambda_\gamma z u} - 1) e^{-u} \frac{du}{u}$$

expliquer, dans lequel \sum signifie une somme finie, et on arrive par la limite à une loi de probabilité G_1 , dont la fonction de répartition s'écrit sous la forme

$$\ln \Phi(z) = - \int_0^{\infty} \ln(1 - i\lambda z) dF(\lambda) = \int_0^{\infty} (e^{iz u} - 1) n(u) du$$

caractériser, λ devant d'abord être > 0 . Une extension de G_1 est G , à laquelle on arrive, si l'on admet pour λ aussi des valeurs négatives; les lois symétriques de la loi G forment une sous-groupe, qui se caractérise par

$$\ln \Phi(z) = - \int_0^{\infty} \ln(1 + \lambda^2 z^2) dF(\lambda) = 2 \int_0^{\infty} (\cos zu - 1) n(u) du$$

caractériser. Comme cas particulier on a la loi de Cauchy

$$\ln \varphi(z) = - \ln(1 + z^2) = 2 \int_0^{\infty} (\cos zu - 1) e^{-u} \frac{du}{u}$$

caractérisée par la fonction de répartition $v(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ à considérer. Finalement on se pose la question de la détermination de $F(\lambda)$ et $n(u)$ à partir de $\Phi(z)$ et sous certaines conditions on y arrive. *F. Knoll (Wien).*

Lévy, Paul: L'addition des variables aléatoires définies sur une circonférence. *Bull. Soc. Math. France* **67**, 1—41 (1939).

Soit $F(x)$ une fonction de la variable réelle x , à variation bornée de $-\infty$ à $+\infty$; considérons-la comme définissant une répartition de masses sur une droite D . Posons

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x), \quad M = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) \right|. \quad (1)$$

L'enroulement de la droite D sur une circonférence Γ de longueur unité conduit à ne pas distinguer des masses situées en des points dont les abscisses aient même partie fractionnaire; x devient une variable définie mod 1. On est ainsi conduit à associer à la répartition sur D une répartition sur Γ , dont la fonction de répartition $\Phi(x)$ sera définie à une constante près par la formule $\Delta \Phi(x) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Delta F(x+h)$ (2) en posant, pour une fonction quelconque $G(x)$, $\Delta G(x) = G(b) - G(a)$, $\Delta G(x+h) = G(b+h) - G(a+h)$, où a, b désignent des constantes arbitraires. Posons

$$m' = \int_a^{a+1} d\Phi(x) = \Phi(a+1) - \Phi(a) = m; \quad M' = \int_a^{a+1} |d\Phi(x)| \leq M.$$

Dans le cas du calcul des probabilités la fonction donnée $F(x)$ est non décroissante et $m = M = M'$. L'auteur démontre le théorème suivant: Si $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ sont trois fonctions à variations bornées de $-\infty$ à $+\infty$ liées par la relation $\Delta F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta F_1(x-y) dF_2(y)$, ils leur correspondent, par la formule (2), trois fonctions $\Phi(x)$, $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ qui vérifient la relation

$$\Delta \Phi(x) = \int_{\Gamma} \Delta \Phi_1(x-y) d\Phi_2(y).$$

L'auteur étudie des répartition (qu'il appelle stables) identiques à leur carré de composition. On a, dans ce cas, $\Delta F(x) = \int_D \Delta F(x-y) dF(y)$. Il considère différentes manières de convergence de suites de répartition sur D et sur Γ et il indique des cas particuliers des lois obtenues par l'enroulement sur Γ des lois définies sur D .

B. Hostinský (Brünn).

Cramér, Harald: On the theory of stationary random processes. *Ann. of Math.*, II. s. **41**, 215—230 (1940).

Un processus aléatoire n -dimensionnel stationnaire $z(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\}$ où chaque $X_r(t)$ est une variable aléatoire unidimensionnelle complexe selon la loi

definition of Khintchine [see Math. Ann. **109** (1934); this Zbl. **8**, 368], is said to define a continuous stationary random process, if the following two conditions are satisfied for all μ and ν : (A) $E\{X_\mu(t)\} = m_\mu$ is independent of t ; (B) $E\{X_\mu(t) \overline{X_\nu(u)}\} = R_{\mu,\nu}(t-u)$ is a function of $t-u$. We may assume (C) $E\{X_\mu(t)\} = 0$ and $E\{|X_\mu(t)|^2\} = \alpha_\mu^2 > 0$; (D) $\lim_{t \rightarrow 0} R_{\mu,\mu}(t) = R_{\mu,\mu}(0) = \alpha_\mu^2$. This paper establishes, among others, the following fundamental results: (a) The correlation functions defined by (B) are for all t given by Fourier-Stieltjes integrals of the form

$$(1) \quad R_{\mu,\nu}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{\mu,\nu}(x),$$

where $F_{\mu,\nu}(x)$ are functions of bounded variation in $(-\infty, \infty)$; further, for any closed interval (α, β) ,

$$(2) \quad H(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{\mu,\nu=1}^n z_\mu \bar{z}_\nu \{F_{\mu,\nu}(\beta+0) - F_{\mu,\nu}(\alpha-0)\}$$

is a non-negative Hermitian form. (b) Conversely, let $R_{\mu,\nu}(t)$ be a set of n^2 functions given by the Fourier-Stieltjes integrals (1), and let them be subject to the condition given in (a). Then it is possible to find n continuous stationary random processes having the correlation functions $R_{\mu,\nu}(t)$. Further the properties of the correlation functions in the case of real continuous stationary random process are discussed. Specially when $n=2$, a brief form of the necessary and sufficient condition that four given functions should be the correlation functions of two real continuous stationary random processes is found. Finally it is shown that an analogous theory may be developed in the case when these random processes are considered for integral values only of the parameter t . *T. Kitagawa.*

Bartlett, M. S.: The present position of mathematical statistics. *J. Roy. Statist. Soc.* **103**, 1—29 (1940).

Die Arbeit bezweckt, den heutigen Stand der mathematischen Statistik zu skizzieren. Dementsprechend werden im ersten Abschnitt ihre Stellung und ihre Aufgabe innerhalb der Statistik umrissen und ihre Beziehungen zu der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Fehlertheorie und den Hauptanwendungsgebieten statistischer Methoden untersucht; dabei identifiziert Verf. die mathematische Statistik mit der theoretischen Statistik und faßt sie als wesentlich durch die Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs gekennzeichnet auf. Im zweiten Abschnitt erörtert Verf. die mathematische Technik der Wahrscheinlichkeiten und Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die statistische Deutung der Wahrscheinlichkeit und die Theorie der Schätzung und der statistischen Zahlenprüfungen. Im letzten Abschnitt werden einige Fragen aus der Psychologie und der Volkswirtschaft als Anwendungsgebieten herausgegriffen. Es folgen einige, hauptsächlich die Abgrenzung der mathematischen Statistik und den Wahrscheinlichkeitsbegriff betreffende Diskussionsbemerkungen von Wishart, Kendall, Jeffreys u. a. *M. P. Geppert (Bad Nauheim).*

Wilks, S. S., and J. F. Daly: An optimum property of confidence regions associated with the likelihood function. *Ann. math. Statist.* **10**, 225—235 (1939).

Die Berechnung von Mutungsbereichen (confidence intervals) ist nicht eindeutig, weil die Grenzen je nach der verwendeten Hilfsfunktion verschieden ausfallen können. Für den Fall, daß nur ein unbekannter Parameter zu schätzen ist, hat S. S. Wilks unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen [*Ann. math. Statist.* **9**, 166—175 (1938); dies. Zbl. **19**, 357] diejenige Hilfsfunktion bestimmt, welche den kleinsten Mutungsbereich liefert. In der vorliegenden Arbeit wird dieser Ansatz auf Probleme ausgedehnt, bei denen mehrere Parameter geschätzt werden müssen. Leider sind die auftretenden Funktionen außerordentlich verwickelt, zudem ist die Bedeutung der notwendigen einschränkenden Voraussetzungen schwer zu übersehen. Praktischen Nutzen wird man aus den Formeln nur in den allereinfachsten Fällen ziehen können, die ohnehin geklärt sind. Das einzige vorhandene Beispiel führt auf die Größe χ^2 von Karl Pearson. *von Schelling (Berlin).*

Geary, R. C.: The mathematical expectation of the mean square contingency when the attributes are mutually independent. J. Roy. Statist. Soc. **103**, 90—91 (1940).

Geary gibt einen neuen Beweis für die Vermutung Tschuprows, daß die mathematische Erwartung für die „mean square contingency“ bei gegenseitiger Unabhängigkeit der Variablen durch die Formel $E\varphi'^2 = \frac{(k-1)(l-1)}{N-1}$ gegeben ist. *F. Knoll.*

Masuyama, Motosaburō: Correlation between tensor quantities. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. **21**, 638—647 (1939).

Verf. versucht, eine dem Pearsonschen Korrelationskoeffizienten nachgebildete Größe für Erscheinungen zu definieren, die durch ein Vektor- oder Tensorsystem festgelegt sind. Sind z. B. zwei Erscheinungen durch zwei Vektoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ festgelegt, $\mathfrak{A} \dots \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \dots \mathfrak{B}$ beobachtet, $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}$ die arithmetischen Mittel der $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{A} - \bar{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{B} - \bar{\mathfrak{B}}$ und definiert man $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_{\nu=1}^N \mathfrak{a}_{\nu} \cdot \mathfrak{b}_{\nu}$, so ist $r = \frac{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})}{\sqrt{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})} \sqrt{(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})}}$ eine brauchbare Größe, die allerdings nur dann 1 wird, wenn $\mathfrak{a} = \lambda \mathfrak{b}$ ($\nu = 1 \dots N$) ist. Von der letzten Einschränkung frei ist das folgende neue Maß:

$$R(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \frac{|[\mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_j]|}{\sqrt{|[\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_j]|} \sqrt{|[\mathfrak{b}_i \mathfrak{b}_j]|}};$$

darin sind die $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i$ die Komponenten von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, $[\mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_j] = \sum_{\nu=1}^N \mathfrak{a}_{\nu} \mathfrak{b}_{\nu}$ das Gaußsche Symbol und $||$ bedeutet Determinantenbildung. Sind die Vektoren wirklich räumlich verteilt, so wird $|R(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})| = 1$ dann und nur dann, wenn \mathfrak{A} und \mathfrak{B} linear abhängig sind; dagegen bedeutet $R = 0$ nicht stochastische Unabhängigkeit. Übertragung auf höhere Vektor- und Tensorsysteme. Als Anwendungsbeispiel berechnet Verf. die Korrelation zwischen dem klimatischen Druckfeld und dem Feld der Temperaturanomalie über Europa. *Harald Geppert (Berlin).*

Biomathematik, Finanz- und Versicherungsmathematik:

Rhodes, E. C.: Population mathematics. I. J. Roy. Statist. Soc. **103**, 61—89 (1940).

Es sei $\Phi(x)$ die reine Fruchtbarkeitsfunktion, so daß von a zur gleichen Zeit geborenen Frauen die Geburt von $a \Phi(x) dx$ weiblichen Kindern zu erwarten ist, wenn sie ein Alter zwischen x und $x + dx$ Jahren erreicht haben. Bedeutet l den Anfang und L das Ende der Fruchtbarkeitsperiode, so ist $a \int_l^L \Phi(x) dx$ die Gesamtzahl weiblicher Kinder, welche von jenen a Frauen während ihres ganzen Lebens geboren werden. $R_0 = \int_l^L \Phi(x) dx$ ist dann die reine Reproduktionsziffer. Bedeutet $B(t)$ die Zahl der zur Zeit t lebend geborenen weiblichen Kinder, so ist die Zahl der von diesen geborenen weiblichen Kinder, wenn sie ein Alter zwischen x und $x + dx$ Jahren erreicht haben, also im Zeitintervall $t + x$ und $t + x + dx$ gleich $B(t) \Phi(x) dx$. — Allgemein wird nun bewiesen: $B(t) = N(\Phi(t) + \Phi_1(t) + \Phi_2(t) + \dots)$, wobei N die Zahl der zur Zeit $t=0$ geborenen weiblichen Kinder ist und $\Phi_n(t) = \int_{t-l}^{t-l} \Phi_{n-1}(u) \Phi(t-u) du$ für $n \geq 2$, $\Phi_1(t) = \int_l^{t-l} \Phi(u) \Phi(t-u) du$ gilt. Durch invariantentheoretische Betrachtungen wird für große n die Näherungsformel

$$\Phi_n(t) = \frac{R_0^{n+1}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{n+1} \cdot \sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(t - (n+1)m)^2}{(n+1)\sigma^2}}$$

gewonnen, wobei m den Mittelwert und σ die Streuung von $\Phi(t)$ bedeutet. Für große

Werte t gilt näherungsweise $B(t) = N \cdot \frac{R_0^m}{m}$. — Ausgehend von der für $t > L + l$ gültigen Gleichung $B(t) = \int_l^L B(t-x) \Phi(x) dx$ wird für die Funktion $B(t)$ eine Reihenentwicklung von der Form $B(t) = \sum_n Q_n e^{\tau_n t}$ abgeleitet. Die τ_n genügen der Bedingung $\int_l^L e^{-\tau_n x} \Phi(x) dx = 1$. Für die Q_m gilt die Lotkasche Formel

$$Q_m = \left\{ \int_l^{2l} B(t) e^{-\tau_m t} dt + \int_{2l}^{L+l} \left(\int_{t-l}^L B(t-x) \Phi(x) dx \right) e^{-\tau_m t} dt \right\} / \int_l^L x e^{-\tau_m x} \Phi(x) dx$$

Spezialfälle, Näherungen und Anwendungen dieser Betrachtungen beschließen die Arbeit. F. Ringleb (Augsburg).

Hess, Hugo: Anwendungen der logistischen Funktion in der mathematischen Bevölkerungs-theorie. Bern: Diss. 1938. 45 S. u. 6 Fig.

Verf. untersucht die Auswirkung einer Fruchtbarkeitsabnahme auf die Entwicklung einer Bevölkerung; er trifft folgende vereinfachende Annahmen: 1. Zu- und Abwanderung werden vernachlässigt, 2. die Sterblichkeit sei konstant, 3. das Verhältnis $f(a, t)$ zwischen der Zahl der zur Zeit t lebenden Frauen, die von Frauen des Alters a abstammen, und der Gesamtzahl dieser Frauen sei das Produkt zweier Faktoren $g(t)$ und $k(a)$, worin $g(t)$ gemäß der logistischen Kurve mit der Zeit abnimmt, während $k(a)$ lediglich vom Alter a der Frauen abhängt. Verf. meint, daß sich beide Faktoren statistisch bestimmen ließen. — Nach dem Vorgang von Lotka leitet Verf. eine Integralgleichung her, aus deren Lösung man erschließt, daß die Bevölkerung

gemäß der logistischen Kurve wächst, falls nicht $\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} p(a) k(a) da < 0$ ist, worin γ_1

und γ_2 die Grenzen der Fruchtbarkeitsperiode und $p(a)$ die Wahrscheinlichkeit dafür bedeuten, daß eine Neugeborene das Alter a erreicht. Für das Studium der Bevölkerungsentwicklung sind also die Annahmen einer nach der logistischen Kurve abnehmenden Fruchtbarkeit oder einer nach derselben Kurve steigenden Zahl von Lebendgeborenen oder die noch einfachere Annahme eines allgemeinen Wachstums der Bevölkerung nach dem logistischen Gesetz gleichwertig. — Gegen die Arbeit des Verf. läßt sich der allgemeine Einwand erheben, den Gini neuerdings in einer Arbeit [Metron 14 (1940)] herausgestellt hat; die Schematisierung einer Bevölkerung durch ein logistisches Gesetz ist deswegen unzulässig, weil dieses Schema in Wirklichkeit nicht vollständig bestätigt wird, da man den Anfang der Kurve und den Höchststand, den eine Bevölkerung unter den zugrunde gelegten Bedingungen erreichen könnte, nicht bestätigen kann. T. Salvemini (Roma).

Aschenbrenner, Alfred: Die Berechnung des Inzuchtgrades. Arch. Rassenbiol. 33, 506—510 (1940).

Der Kern der Arbeit liegt im Hervorheben der Tatsache, daß der Ahnenverlust einer Bevölkerung nicht wie der eines Individuums nur auf Inzucht beruht, sondern auch auf der natürlichen Fruchtbarkeit an sich, indem z. B. Geschwister dieselben Ahnen haben, auch ohne jede Inzucht. — Diesen wichtigen Umstand beachtet die neue Methode des Autors und führt auf die dem Mathematiker ohne weiteres durchsichtige Formel, daß der gesamte nur von Inzucht stammende Ahnenverlust der Bevölkerung bis zur n -ten Generation das Produkt ist aus dem durchschnittlichen Inzuchtkoeffizienten der Einzelperson, deren theoretischer Ahnenzahl $2^{n+1} - 2$ und der Personenanzahl. Aigner (Graz).

Ruchti, W.: Amonotonie der Sterblichkeitsabnahme im ersten Lebensjahr. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H. 39, 47—52 (1940).

An einer nach Altersmonat und Geburtsmonat gegliederten Tabelle der Sterbenswahrscheinlichkeiten 1931/37 wird gezeigt, daß im ersten Lebensjahr die Sterbensintensität nicht monoton abnimmt, sondern bei Berücksichtigung des Geburtsmonats im Winter einen vorübergehenden Wiederanstieg aufweist.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Teker, I.: Tavole selezionate di mortalità H^M e Imf 1901 e conseguenti tavole di commutazione, con applicazioni. Giorn. Mat. Finanz., II. s. 9, 61—90 (1939).

Einem Gedankengange von F. Insolera folgend, wird gesetzt $\mu_{[x]+t} = \mu_x \cdot z_t$,

worin μ_x einer Aggregattafel entnommen wird und $z_t = 1 - 0,017(5 - t)^2$ ist. Die Tafeln der Größen $l_{[x]+t}$, ($t = 0, 1, 2, 3, 5$); $D_{[x]+t}$; $N_{[x]+t}$; $a_{[x]+t}$; a_{x+t} ; $A_{[x]+t}$; A_{x+t} ; $P_{[x]+t}$; P_{x+t} ; ${}_sV_{[x]}$ (für ausgewählte Fälle) werden dann in bekannter Weise ermittelt, wobei als Ausgangstafeln HM und Imf 1901 Verwendung finden. Die Hauptgleichung (5) der Arbeit ist sicher nicht exakt, sondern nur genähert richtig.

F. Knoll (Wien).

Jéquier, Ch.: L'assurance d'annuités, cas particulier de l'assurance temporaire. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H. 39, 31—46 (1940).

Dans le chapitre premier on donne des exemples de l'assurance d'annuités, où les réserves mathématiques sont presque toujours négatives. Pour approfondir l'étude de ce problème technique, l'auteur va assimiler l'assurance d'annuités à une assurance temporaire au décès dont les capitaux décroissent. A ce but il analyse (chapitre II) quelques types spéciaux des assurances temporaires: Premier type avec „décroissance limite“ où les réserves mathématiques sont nulles pour toutes les années. Les capitaux assurés sont tous inversement proportionnels au risque c'est-à-dire $K_1 = 1/q_x$, $K_2 = 1/q_{x+1}, \dots$ où les rapports $\varrho_1 = K_1/K_2 = \frac{q_{x+1}}{q_x} = \lambda_1, \dots$. D'après cette analyse on peut énoncer le théorème suivant: dans l'assurance temporaire à capitaux décroissants les réserves mathématiques peuvent être nulles, positives ou négatives. Elles sont nulles si les capitaux assurés sont tous inversement proportionnels aux q_x (cas limite $\varrho = \lambda$), positives, si la décroissance est plus lente ($\varrho < \lambda$), négatives, si la décroissance est plus rapide que celle du cas limite ($\varrho > \lambda$). On donne une épreuve technique que les assurances d'annuités, peuvent être assimilées à des assurances de capitaux, dont les capitaux successifs auraient les valeurs $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, 0$ (chapitre III). Deux exemples numériques renseignent sur l'allure de la réserve mathématique.

Janko (Prag).

Münzner, H., und H. Schwarz: Ein Zusammenhang zwischen Erneuerungszahlen und dem Moivreschen Problem. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforsch 6, 46—49 (1940).

Die Erneuerungsfunktion wird abgeleitet als Summe von polynomialen Wahrscheinlichkeiten $W(\alpha_v)$ für ein bestimmtes k -Tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, wo α_v die Anzahl der Elemente ist, die v Zeiteinheiten bei der Gesamtheit verweilen. Die Wahrscheinlichkeit $W(\alpha_v)$ wird bekannterweise durch die Polynomialverteilung mittels der Wahrscheinlichkeiten p_v , daß ein Element v Zeiteinheiten bei der Gesamtheit bleibt, ausgedrückt. Darauf wird gezeigt, wie die Erneuerungsfunktion als Summe der Wahrscheinlichkeiten des Moivreschen Problems abgeleitet werden kann und die Gleichheit der durch beide Methoden erhaltenen Formeln mathematisch klargestellt.

Janko (Prag).

Dasen, E.: Recherches sur la détermination approximative du taux de rendement des emprunts à taux d'intérêt nominal variable. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H. 39, 75—92 (1940).

Die Formel $i_0 a_{n_1+n_2} = i_1 a_{n_1} + i_2 v^n a_{n_2}$, in der i_1 den Nominalzinsfuß in dem ersten (n_1 -jährigen) Abschnitt, i_2 den Nominalzinsfuß in dem zweiten (n_2 -jährigen) Abschnitt bedeutet, während in a, v die wirklich zu erzielende Verzinsung i einzusetzen ist, gibt mit i_0 den gleichbleibenden Nominalzinsfuß einer $n_1 + n_2$ Jahre laufenden, nach dieser Zeit mit dem Nominalbetrage zu tilgenden Anleihe an. Als erste Näherung erhält man $i'_0(n_1 + n_2) = i_1 n_1 + i_2 n_2$; numerische Untersuchungen zeigen, daß diese Formel zu ungenau ist; nach den von Meidell entwickelten Methoden werden weitere Näherungsformeln entwickelt und an Zahlenbeispielen gezeigt, daß die erreichte Approximation sehr günstig ist. Dasen entwickelt aus praktischen Gründen ausgehend von i'_0 durch eine geschickte weitere Approximation eine sehr brauchbare Näherungsformel. Auf die Wiedergabe der Formeln muß verzichtet werden. F. Knoll.

Kershner, Richard: Note on compound interest. Amer. Math. Monthly 47, 196—198 (1940).

Die Äquivalenzrelation der Finanzmathematik genügt als Gleichheitsrelation den drei

Fundamentalaxiomen dieser Relation. Für die einfache Verzinsung ist die Äquivalenzrelation nicht erfüllt. Anschließend wird der Satz bewiesen, daß die einzige Relation in zwei Gliedern, die die drei Gleichheitsaxiome und ein System von fünf weiteren Axiomen erfüllt, durch die Definition „ (s_1, t_1) ist äquivalent mit (s_2, t_2) dann und nur dann, wenn $s_1 e^{-j t_1} = s_2 e^{-j t_2}$ ist“ festgelegt wird.

F. Knoll (Wien).

Blasco, J.: Das Gesetz von Pareto über die Verteilung der Einkommen. An. Soc. Ci. Argent. 128, 331—341 (1939) [Spanisch].

Arbeit ist infolge eines Rechenfehlers zu Beginn der Überlegungen nur für einen (trivialen) Sonderfall richtig.

F. Knoll (Wien).

Weinberger, Ottone: Alcuni appunti sull'economia matematica in Austria. Period. Mat., IV. s. 20, 84—98 (1940).

Betrachtungen über die Stellungnahme der wichtigsten Vertreter der österreichischen Schule der Nationalökonomie hinsichtlich der mathematischen Methoden. Verf. beabsichtigt insbesondere, das Werk von Auspitz und Lieben hervorzuheben.

Bruno de Finetti.

Peter, Hans: Zur Diskussion makroökonomischer Wirtschaftsmodelle. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforschg 6, 24—33 (1940).

Die in der neuesten Zeit behandelten makroökonomischen Wirtschaftsmodelle setzen nicht etwa eine Laplacesche Weltformel voraus. Es gibt soziologische Fragen, bei denen Mathematik nicht zu brauchen ist. „Aber in quantitativen Fragen sie nicht zu benutzen ist sträflicher Leichtsinn.“ Ein theoretisches Modell muß eine sinnvolle Gleichung zwischen ökonomisch bedeutsamen Größen geben. In der heutigen Ökonometrik kommt man so zu Gleichungen der Form $\dot{z}(t) = a \cdot z(t) - c \cdot z(t - \tau)$. Durch den Ansatz $z = e^t$ erhält man, mit $v = \tau(a - r)$, $e^v = K \cdot v$, wo $K = e^{a\tau}/c\tau$ ist. An Beispielen untersucht Verf. den Einfluß der Konstanten. „Die Beispiele sind konstruiert; aber Beispiele, die in irgendeiner Form eine Grundlage für Planungen bilden sollen, müssen über die unmittelbare Beobachtung hinausgreifen und erfordern somit Konstruktionen.“

Lorey (Frankfurt a. M.).

Klimpt, Werner: Note über eine lineare homogene Differenzen-Differentialgleichung. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforschg 6, 34—42 (1940).

Es wird der Verlauf der Lösungen der in der Arbeit von Peter (vgl. vorsteh. Ref.) auftretenden Differenzen-Differentialgleichung untersucht, insbesondere auch für den bisher noch nicht beachteten Fall negativer Werte von K . Wegen rein mathematischer Arbeiten über die Differenzen-Differentialgleichung sei außer auf Schürer, Leipziger Berichte 64 (1912) aus neuester Zeit auf Hermann Schmidt, Jber. Deutsch. Math.-Verein. 49, 7—9, (1939) und Perron, Math. Ztschr. 45, 127—141 (1939), dies. Zbl. 20, 232 verwiesen.

Lorey.

Geometrie.

Projektive und algebraische Geometrie:

● **Heffter, Lothar: Grundlagen und analytischer Aufbau der Projektiven, Euklidischen, Nichteuklidischen Geometrie.** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1940. VIII, 199 S. u. 66 Fig. geb. RM. 12.—.

In dem vorliegenden Buch wird in gedrängter Form der Inhalt des bekannten, von dem Verf. teilweise zusammen mit C. Koehler veröffentlichten dreibändigen Lehrbuches der analytischen Geometrie (1905—1929) nochmals dargestellt. Es wird also auf der Grundlage eines Axiomensystems des vollständigen dreidimensionalen projektiven Raumes zunächst die projektive Geometrie entwickelt — hierbei wird von Anfang an von einem Stetigkeitsaxiom wesentlich Gebrauch gemacht —, sodann nach Auszeichnung einer unendlich fernen Ebene die affine Geometrie und schließlich nach Auszeichnung metrischer Fundamentalgebilde die euklidische und nichteuklidische Geometrie aufgebaut; dabei wird ausgeführt, wie man „Polarfiguren“, die stets reell sind, als metrische Fundamentalgebilde verwenden kann. Im ganzen ist eine straffere Systematisierung des Aufbaus, zum Teil unter Verwendung späterer Arbeiten des Verf., durchgeführt. So werden die durch Elementepaare, -tripel und -quadrupel bestimmten Invarianten der metrischen Geometrie nach einem einheitlichen Prinzip („allgemeines Prinzip der Maßbestimmung“) unter weitestmöglicher Ausnutzung der Dualität hergeleitet. Durchweg sind die für den Aufbau notwendigen Definitionen und Sätze vollständig angegeben, von den Beweisen dagegen nur die wichtigeren

ausgeführt. Von den in dem Lehrbuch ausführlich behandelten Gegenständen ist z. B. die metrische Untersuchung der Gebilde 2. Grades nur angedeutet, gänzlich weggefallen ist die Theorie der Büschel und Scharen von Kurven und Flächen 2. Grades, aber z. B. auch die Klassifikation der Projektivitäten in der Ebene und im Raum nach ihren Fixelementen. Dagegen ist für die entsprechende Klassifikation der Bewegungen eine neue Darstellung gegeben. Neben die Kleinschen Modelle werden zum Schluß andere Darstellungsmöglichkeiten der nichteuklidischen Geometrien gestellt, darunter ein euklidisch unendliches Bild des hyperbolischen und ein euklidisch endliches Bild des elliptischen Raumes.

Bachmann (Marburg a. d. L.).

● **Bompiani, Enrico:** *Geometria analitica con elementi di proiettiva*. Roma: R. Pioda 1939. 391 pag.

● **Kommerell, Karl:** *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*. Leipzig: A. F. Köhler 1940. VII, 388 S. u. 77 Fig. geb. RM. 20.—.

Das ursprünglich als Neubearbeitung des bewährten Lehrbuches von Salmon-Fiedler geplante, dann in den Vorlesungen des Verf. verselbständigte Werk ist vorwiegend für den Studenten geschrieben; es kann — zum eigenen Vorteil — seinen Ursprung nicht verleugnen und teilt mit seiner Vorlage die behagliche Ausführlichkeit der Darstellung und die große Liebe zum geometrischen Objekt, zu dessen Untersuchung die Algebra nur das Hilfsmittel liefert. Aus didaktischen Erwägungen heraus wurde stillschweigend der Euklidische reelle Raum zugrunde gelegt und von der Behandlung mehrdimensionaler Räume abgesehen, trotzdem die gedanklichen Grundlagen viel weiter greifen, ebenso wurde auf Axiomatik nicht eingegangen. Zweierlei gibt dem Buch sein eigenes Gepräge, einmal die Lockerung des Stoffes durch Einbeziehung zahlreicher geometrischer Anwendungen (z. B. einer ausführlichen Theorie der Fresnelschen Wellenfläche und der inneren und äußeren konischen Refraktion, der Kollineationen der Kugel in sich und damit der Lorentztransformation und ihrer relativistischen Deutung, des Pohlkeschen und Gaußschen Satzes, der Reliefperspektive u. a.), sodann die Gründlichkeit, mit der Verf. an vielen Stellen, wo es sich um Fallunterscheidungen oder Prägung allgemeiner Sätze handelt, die gängige Literatur berichtigt und ergänzt. Er macht z. B. darauf aufmerksam, daß ein Kegel in Ebenenkoordinaten nicht durch eine, sondern durch zwei Gleichungen dargestellt wird, daß parallele Ebenen aus einer F_2 allgemein nur dann ähnliche C_2 ausschneiden, wenn man Voraussetzungen über das Nichtzerfallen und die Realität dieser C_2 macht, daß eine Ebene aus einer Mittelpunkts- F_2 und ihrem Richtkegel nur dann ähnliche C_2 ausschneidet, wenn sie nicht durch den Mittelpunkt geht, nicht die F_2 berührt und es keine zu ihr parallele Tangentialebene gibt, die vom Mittelpunkt weiter entfernt ist, daß die Drehflächen durch die Existenz einer von Null verschiedenen Doppelwurzel der Hauptachsengleichung gekennzeichnet werden. Auch an vielen anderen Stellen finden sich originelle Beiträge des Verf., z. B. bei der Behandlung mehrfacher Wurzeln der Hauptachsengleichung, der Fresnelschen Wellenfläche, der Kollineationsinvarianten und des Pohlkeschen Satzes. Als Mangel der Darstellung mag es vielleicht empfunden werden, daß die Vektorrechnung zwar im ersten Kapitel begründet, in den späteren Abschnitten jedoch nicht ausgenutzt wird. — Inhalt: 1. Vektorrechnung. Koordinaten. Gerade und Ebene. Ideale Elemente. Dualitätsprinzip und Ebenenkoordinaten. Linearer Strahlenkomplex. Kugel und Kugelmischel. 2. Flächen und Raumkurven, allgemeine Eigenschaften. Torsen. Spezielle F_2 . 3. Allgemeine Eigenschaften der F_2 . Quadratische Formen, ihre kanonische Darstellung, Invarianten, Trägheitsgesetz. 4. Klassifikation der F_2 . Kreisschnittmodelle. Fokalkegelschnitte. 5. Spezielle F_2 . Erzeugendendarstellung, Durchmesserbenen. Fresnelsche Wellenfläche. 6. Tetraederkoordinaten. Komplexe Strahlensysteme. 7. Kollineationen und Korrelationen. Involutorische Kollineationen. Die einander zugeordneten Systeme konfokaler F_2 . Lorentztransformation. Nichteuklidische Bewegungen. Affine Kollineationen. Ivorys Theorem. Satz von Pohlke. 8. F_2 -Büschel. Gemeinsame Elemente. Konfokale Systeme. Elliptische Koordinaten.

Harald Geppert (Berlin).

Werenskiold, W.: *Lineare Transformationen*. Norsk mat. Tidsskr. 22, 10—12 (1940) [Norwegisch].

Die affine Abbildung: $x = au + bv$, $y = cu + dv$ kann man in komplexer Schreibweise auf die Form: $x + iy = \frac{1}{2} \{(a + d) + i(c - b)\} (u + iv) + \frac{1}{2} \{(a - d) + i(b + c)\} (u - iv)$ bringen, der man durch Einführung von Polarkoordinaten mit geeigneter Anfangsrichtung die Form: $e^{i\varphi} = A e^{i\psi} + B e^{-i\psi}$ geben kann; aus ihr entnimmt man sofort, daß ein Kreis um 0,0 in eine Ellipse mit dem Mittelpunkt 0,0 übergeht.

Harald Geppert (Berlin).

Deaux, R.: *Polarités planes transformant l'une en l'autre deux polarités données*. Mathesis 54, 9—18 (1940).

L'Autore esamina specialmente le polarità θ_x che trasformano una nell'altra due

polarität date θ_1, θ_2 distinte, ma entrambe uniformi o non uniformi: egli si serve di procedimenti sintetici deducendo le θ_x dalle omografie aventi per quadrato il prodotto $\theta_1 \theta_2$ e utilizzando un suo precedente lavoro (vedi questo Zbl. 20, 389). *P. Buzano.*

Elie, Jean: Triangles trihomologiques aux axes d'homologie concourantes. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 10, 49—51 (1939).

Verf. gibt einen direkten geometrischen Beweis für die von G. Simionescu [Gaz. mat. 42, 286 (1937)] abgeleitete Tatsache, daß bei dreifachperspektiven Dreiecken mit kollinearen Perspektivitätszentren die Perspektivitätsachsen durch einen Punkt gehen und umgekehrt. Beide Aussagen sind je zueinander dual, und Verf. stützt daher seinen Beweis auf den seit Steiner-Schröter bekannten Satz, wonach die Zweifachperspektivität zweier Dreiecke ihre Dreifachperspektivität einschließt. Dies ist eine altbekannte konfigurationstheoretische Deutung des Pappus-Pascalschen Satzes für ein Geradenpaar als entarteten Kegelschnitt. Einige Folgesätze werden gewonnen. *Steck (München).*

Weitzenböck, R.: Über affine Invarianten bei Kegelschnitten. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 43, 159—167 (1940).

Bekanntlich (siehe Verf. „Invariantentheorie“, Groningen 1923, S. 223) besitzen eine quadratische und zwei lineare ternäre Formen ein kürzestes rationales System von fünf relativ-invarianten Bildungen, zwischen denen eine einzige Syzygie besteht. Nach Spezialisierung einer der linearen Formen und beim Hinzutreten passender Realitätsbedingungen gehen diese projektiven Invarianten in die affinen Invarianten einer Sehne und einer Ellipse über. — Bei den Transformationen der unimodularen affinen Gruppe lassen sich aus diesen relativen rationalen Invarianten zwei absolute irrationale ableiten: die Flächeninhalte R bzw. S jener Dreiecke, die die betreffende Sehne mit ihrem Pol bzw. mit dem Zentrum der Ellipse bildet. Man findet für den Flächeninhalt eines von der Sehne und der Ellipse begrenzten Segmentes:

$$P = \pm (R + S) \cdot \sqrt{\frac{R}{S} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{RS}}{R + S} + \arctg \sqrt{\frac{R}{S}} \right\}}.$$

Der Fall der Parabel wird für sich betrachtet.

D. Barbilian (București).

Weitzenböck, R.: Zur Affingeometrie der F_2 im R_3 . Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 43, 168—178 (1940).

Mittels zweier irrationaler Invarianten V, W einer quaternären quadratischen und einer (quaternären) linearen Form gegenüber der unimodularen affinen Gruppe (nämlich der Rauminhalte zweier gewisser Kegel zweiter Ordnung) wird in engem Anschluß an die obige Arbeit das Volumenelement eines Ellipsoides und damit das Volumen eines der beiden durch eine Ebene aus dem Ellipsoid geschnittenen Segmente ausgedrückt.

D. Barbilian (București).

Marzella, Lena: Risoluzione e discussione di alcuni problemi sulle coniche. Riv. Fis. Mat. Sci. Nat. 14, 105—111, 166—171 e 259—265 (1939).

Ein Kegelschnitt ist im allgemeinen durch fünf Elemente (Punkte oder Tangenten) bestimmt. Ein Brennpunkt als Ausgangspunkt zweier isotropen Tangenten kann zwei gegebene Tangenten ersetzen. Verf. löst und diskutiert nun die Konstruktionsaufgaben, bei denen ein Brennpunkt und drei weitere Elemente gegeben sind. Die Lösungen sind elementar und meist bekannt. Bekannt ist insbesondere die von der Verf. für neu gehaltene Benutzung des Satzes, daß die Polarkurve eines Kegelschnitts bezüglich eines Kreises um einen Brennpunkt ein Kreis ist, zur Lösung der Aufgaben, einen Kegelschnitt zu konstruieren, von dem ein Brennpunkt, zwei Punkte und eine Tangente oder ein Brennpunkt und drei Punkte gegeben sind (vgl. z. B. J. Steiner, Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Behandlung, bearbeitet von C. F. Geiser. Leipzig 1867, S. 158—159). Für dieselben beiden Aufgaben werden aber zwei weitere, wahrscheinlich neue Lösungen gegeben mit Benutzung des Satzes, daß die Kreise, welche die zu dem gegebenen Brennpunkt gehörigen Leitstrahlen der Punkte des Kegelschnitts zu Durchmessern haben, von dem Fußpunktkreis des Brennpunktes

bezüglich des Kegelschnittes eingehüllt werden. Den Beweis dieses Satzes hätte sich Verf. allerdings ersparen können, wenn ihr bekannt gewesen wäre, daß es sich um einen Sonderfall des für beliebige Kurven geltenden Raabeschen Satzes über Fußpunktkurven handelt [J. L. Raabe, *J. reine angew. Math.* **48**, 105—129 (1854)].

Max Zacharias (Berlin).

Gambier, Bertrand: Sur une configuration de trois coniques. 2. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. **25**, 25—27 (1939).

L'Autore spiega un apparante paradosso che si era presentato nella 1a parte del lavoro (questo Zbl. **20**, 158).

P. Buzano (Torino).

Klug, L.: Die Schmiegunskreise der Kegelschnitte. *Mat. fiz. Lap.* **47**, 27—33 u. deutsch. Zusammenfassung 33 (1940) [Ungarisch].

Es werden die verschiedenen Konstruktionen des Mittelpunktes der Schmiegunskreise der Kegelschnitte aus einer von Steiner gegebenen Konstruktion abgeleitet.

Autoreferat.

Fischer, I. C.: Projective constructions for certain algebraic curves. *Amer. Math. Monthly* **47**, 193—195 (1940).

Gegeben sei ein Bezugsdreieck ABC , zwei Geraden l_1, l_2 und ein Kegelschnitt K . Von A aus ziehe man einen veränderlichen Strahl, der K in M trifft; MB und MC mögen l_1, l_2 in L_1 bzw. L_2 schneiden; $L_1 L_2$ trifft endlich AM in P . Mit variablem Strahl beschreibt P eine Kurve 6. Ordnung, für die A im allgemeinen vierfacher Punkt, die Schnittpunkte D_1, D_2 von AB und AC mit l_1 bzw. l_2 hingegen Doppelpunkte sind. Verf. untersucht die Ausartungen dieser Kurve bei speziellen Lagen der Ausgangselemente.

Harald Geppert (Berlin).

Cattaneo, Paolo: Sulle normali ad una linea piana algebrica passanti per un punto dato del suo piano. *Atti Mem. Accad. Sci. Padova*, N. s. **55**, 135—140 (1939).

An die Parabel $y^2 = 2px$ lassen sich von einem allgemeinen Punkt P aus drei echte Normalen ziehen; nimmt man die unechte Normale nach dem Fernpunkt der Achse hinzu, so bilden die vier Normalen ein harmonisches Quadrupel, wenn P auf der semikubischen Parabel $27py^2 = 4(x-p)^3$ liegt, ein äquianharmonisches Quadrupel für die Punkte der Geraden $x = p$ und ein Quadrupel festen Doppelverhältnisses für die Punkte eines Paares semikubischer Parabeln. An die semikubische Parabel $y^3 = 3px^2$ lassen sich von einem allgemeinen Punkt aus vier echte Normalen legen; sie geben ein äquianharmonisches bzw. harmonisches Quadrupel für die Gerade $y = \frac{p}{6}$ bzw. die Parabel $81x^2 + 288py + 16p^2 = 0$ und bilden für die Punkte einer gewissen Quartik ein festes Doppelverhältnis.

Harald Geppert (Berlin).

Perl, Andreas: Die singulären Punkte bei algebraischen Kurven von höchstens der 6. Ordnung. *Mitt. math. Ges. Hamburg* **8**, Tl. 2, 152—163 (1940).

Jeder singuläre Punkt einer algebraischen Kurve kann durch zwei Kennziffern d, k bezeichnet werden, die angeben, um wieviel durch sein Auftreten das Geschlecht bzw. die Klasse der Kurve erniedrigt werden. Bei den Kurven der Ordnung ≤ 6 untersucht nun Verf. die möglichen Arten 2-, 3- und 4-facher Punkte durch Aufstellung der durch sie gehenden Zweige auf ihre Kennziffern.

Harald Geppert (Berlin).

Apéry, Roger: Sur les sextiques à 8 rebroussements. *C. R. Acad. Sci., Paris* **209**, 744—746 (1939).

Si dimostra il seguente teorema: Condizione necessaria e sufficiente affinché una sestica ammetta 8 cuspidi date A_1, A_2, \dots, A_8 , è che questi 8 punti si corrispondano due a due in una stessa omologia armonica e che le rette che congiungono coppie omologhe formino un fascio equianarmonico.

Sandro Faedo (Roma).

Gambier, Bertrand: Application du théorème de d'Alembert à l'étude de configurations géométriques. *C. R. Acad. Sci., Paris* **210**, 523—525 (1940).

Es seien B eine Raumkurve 4. Ordnung 1. Art und σ eine Quadrik; es wird ein in B eingeschriebenes Tetraeder gesucht, das in bezug auf σ autopolar sei. Es gibt Lösungen,

und zwar im allgemeinen zwei Lösungen, nur dann, wenn σ mit allen durch B hindurchgehenden Quadriken apolar ist. Die Umkehrung dieser Eigenschaft wird hier durch folgende Konstantenabzählung erreicht: Die Quadriken, die mit allen durch B hindurchgehenden Quadriken apolar sind, bilden eine irreduzible V_7 ; die Eckengruppen von zwei in B eingeschriebenen Tetraedern allgemeiner Lage sind jetzt auch ∞^7 (da diese Tetraeder zwei autopolare Tetraeder einer Quadrik sein sollen, so müssen ihre Ecken acht assoziierte Punkte sein) und erschöpfen also alle ∞^7 Quadriken der Mannigfaltigkeit V_7 . Die hier benutzte Tatsache, daß eine algebraische W_n , die einer irreduziblen algebraischen V_n angehört, mit dieser zusammenfällt, ist mit dem Fundamentalsatz der Algebra eng verbunden; in der Tat besteht dieser Satz in der Behauptung, daß die W_n der Polynome $(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n)$ mit der V_n der Polynome $z^n + A z^{n+1} + \dots + A_n$ gleichbedeutend ist. E. G. Togliatti (Genova).

Weitzenböck, R.: Über lineare Linienkomplexe bei vier Geraden im R_4 . Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 43, 316—324 (1940).

Unter Verwendung symbolischer Methoden wird der Satz bewiesen, daß durch die acht Geraden 1 bis 4 und 1* bis 4* einer Doppelpaar des R_4 (d. s. vier Geraden allgemeiner Lage des R_4 und ihre Treffgeraden zu je dreien) ∞^2 lineare Strahlenkomplexe gehen. Unter ihnen sind genau drei spezielle Komplexe (d. s. Ebenen) enthalten, aus denen sich alle anderen durch Linearkombination gewinnen lassen. Diese drei Ebenen L_1, L_2, L_3 sind die Schnitte der Räume, welche die Geradenpaare (1, 2) und (3, 4) usw. verbinden. Die Brennpunkte der übrigen Komplexe erfüllen eine vierte Ebene L , nämlich die Verbindungsebene der drei Schnittpunkte der Ebenenpaare (L_1, L_2) , (L_2, L_3) , (L_3, L_1) . Diese Ebene L trifft keine der acht Geraden der Doppelpaar. Durch vier Geraden 1 bis 4 allein gehen ∞^5 lineare Komplexe. Eine Ermittlung der Gleichung des Strahlkomplexes durch neun Geraden des R_4 in Gestalt einer verschwindenden Determinante sechster Ordnung beschließt die Arbeit.

K. Strubecker (Wien).

Marchaud, A.: Sur les surfaces du troisième ordre de la géométrie finie. J. Math. pures appl., IX. s. 18, 323—362 (1939).

Bekanntlich enthält die von Juel seinen bekannten Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung zugrunde gelegte Definition dieser Flächen Differenzierbarkeitsannahmen (jeder ebene Schnitt der Fläche soll stetige Tangente besitzen). Verf. geht demgegenüber aus von der folgenden ganz allgemeinen Definition: Unter einer Fläche F_3 von 3. Ordnung im projektiven R_3 verstehe man jede abgeschlossene Punktmenge, deren ebene Schnitte Kurven von höchstens 3. Ordnung sind, und wobei mindestens ein Schnitt eine nichtzerfallende (d. h. keine Gerade enthaltende) Kurve von genau 3. Ordnung liefert [Kurve 3. Ordnung = Kontinuum 3. Ordnung ohne Endpunkte plus (gegebenenfalls) eine Kurve 2. Ordnung oder ein (doppeltzählender) isolierter Punkt]. Nun wird gezeigt: Jede solche F_3 ist entweder ein Kegel oder eine geradlinige Fläche, erzeugt durch stetige Bewegung einer Geraden, oder jeder Punkt der F_3 , abgesehen von höchstens vier Ausnahmepunkten, liegt im Innern je eines geeignet und hinreichend klein gewählten geraden Kreiszylinders \mathcal{Z} , so daß $\mathcal{Z}F_3$ über der Grund- (oder der Deck-) fläche von \mathcal{Z} darstellbar ist durch $z = f(x, y)$ mit eindeutiger, dehnungsbeschränkter (stetiger) f . Außerdem wird gezeigt: Jede geradlinige F_3 , welche keinen Kegel enthält, besitzt eine stetige Tangentialebene in jedem Punkt, ausgenommen genau eine Leitgerade und evtl. zwei Ausnahmepunkte (Tangentialebene = Träger des Kontingents oder Paratingents im betrachteten Punkt). Diese Stetigkeit der Tangentialebene gilt im allgemeinen nicht für Kegel 3. Ordnung und — voraussichtlich — auch nicht für die konvexen Teile einer F_3 . Dagegen hält es Verf. für wahrscheinlich, daß auf den nichtkonvexen Teilen einer F_3 , abgesehen von singulären Punkten, die Tangentialebene immer stetig ist; für den Fall der Drehflächen 3. Ordnung wird dies vom Verf. bewiesen. Würde die Vermutung allgemein zutreffen, so bestände Aussicht, den Juelschen Satz über die Geraden der Flächen 3. Ordnung von

allen Differenzierbarkeitsannahmen zu befreien, d. h. ihn auf die Marchaudschen F_3 auszudehnen. Die schönen Ergebnisse der Arbeit stellen einen wesentlichen Fortschritt in der Theorie der Flächen 3. Ordnung dar. Wegen weiterer Einzelheiten muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. *Haupt (Erlangen).*

Rozet, O.: Sur les surfaces de genres un, d'ordre huit, de l'espace à cinq dimensions. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 25, 582—587 (1939).

φ_{ik} bedeuten Linearformen in $x_0, x_1 \dots x_r$. Die Gleichungen, die besagen, daß in der Matrix $\|\varphi_{ik}\|$ ($i = 1, 2, 3; k = 1 \dots 4$) alle dreireihigen, und in der Matrix $\|\varphi_{ik}\|$ ($i = 1, 2, 3; k = 1, 2$) alle zweireihigen Determinanten verschwinden, stellen im Falle $r = 4$ eine kanonische C_8 des Geschlechts 5 im S_4 , im Falle $r = 5$ hingegen eine F_8 dar, deren sämtliche Geschlechter $p_a = p_g = P_2 = \dots = 1$ sind, deren Hyper-ebenen-schnitte das Geschlecht 5 haben und die Normalfläche im S_5 ist. Sie gehört einem zweidimensionalen Linearsystem von Hyperquadriken an, ist aber im Gegensatz zu den bisher bekannten Beispielen solcher Normalflächen nicht der vollständige Schnitt dreier Hyperquadriken. F_8 trägt ein basisfreies Büschel ebener C_3 . *Harald Geppert.*

Godeaux, Lucien: Sur les transformations birationnelles involutives de l'espace ayant une courbe unie. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 25, 113—117 (1939).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 8, 170) hat Verf. die Involutionen zweiter Ordnung J_2 des R_3 mit einer endlichen Anzahl von Fixpunkten untersucht und gezeigt, daß die Zahl der letzten 8 sein muß. Jetzt untersucht Verf. die J_2 des R_3 , deren Fixpunkte eine Kurve C , aber keine Fläche erfüllen: erzeugen dann die Verbindungsgeraden entsprechender Punktpaare einen Komplex Σ , so beweist Verf., daß dieser Komplex linear sein muß; es bleibt noch die Möglichkeit, daß jene Verbindungsgeraden eine Kongruenz bilden. Liegen auf jedem Strahl von Σ ν Punktpaare von J_2 , so hat C die Ordnung $2\nu + 2$ und die durch J_2 erzeugte birationale Transformation T des S_3 in sich die Ordnung $2\nu + 1$. Wird T durch zwei Polaritäten und ein Nullsystem erzeugt, so entsteht eine von Montesano und Paelinck (Mém. Soc. Sci. Liège 1932; dies. Zbl. 6, 77) untersuchte, zu $\nu = 1$ gehörige Kongruenz. Die von Montesano und Snyder (Ann. of Math. 1930, 335—343) studierte Kongruenz gehört zu $\nu = 3$, die von Falla (Bull. Acad. Roy. Belg. 1936, 606—614; dies. Zbl. 14, 76) behandelte Kongruenz gehört zu $\nu = 4$. *Harald Geppert (Berlin).*

Differentialgeometrie:

Maeda, Jusaku: On the theory of curves in Euclidean three-space. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 28, 319—333 (1940).

Verf. beweist neun Sätze über Raumkurven, von denen die beiden folgenden erwähnt seien: Ist die Torsion einer Raumkurve konstant, dann liegt die Affin-Binormale jedes Kurvenpunktes in der rektifizierenden Ebene des Punktes. Liegt der Mittelpunkt der Schmiegunskugel jedes Kurvenpunktes in der zugehörigen Schmiegungebene, so besteht zwischen der Krümmung k und der Torsion t die Gleichung $k^2:t = \text{konst.}$

W. Haack (Karlsruhe).

Maeda, Jusaku: On the theory of curves in affine space. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 28, 350—369 (1940).

Durch den Punkt C einer Raumkurve (C) legt man eine von der Tangente verschiedene Gerade g . Hält man die Lage von g in bezug auf das begleitende Dreiein aus Tangente, Affin-Haupt- und Binormale affingeometrisch fest, wenn C die Kurve durchläuft, so beschreibt g eine Regelfläche, die nur abwickelbar ist, wenn die Affinkrümmung von C verschwindet. — Die Gesamtheit der Geraden g in ein und demselben Punkt C , für welche die Affinkrümmung der Parallelprojektion von (C) in Richtung g auf die Schmiegungebene den gleichen Wert hat, bildet einen Kegel zweiten Grades. — Verf. untersucht im folgenden die oskulierenden linearen Komplexe der beiden Regelflächen, die von der Affin-Hauptnormalen und der Affin-Binormalen erzeugt werden.

W. Haack (Karlsruhe).

Coleman, A. J.: Curves on a surface. Amer. Math. Monthly 47, 212—220 (1940).

Die Abhandlung bietet einen eleganten, gedrunenen Abriß der klassischen Flächentheorie. Besonders beachtenswert ist ein kurzer und natürlicher Beweis des Theorema egregium, der sofort die Liouvillesche Formel für das Krümmungsmaß ergibt. Er geht davon aus, daß

$$K = (n, n_1, n_2)/\sqrt{g} = ((w \cdot v_1)_2 - (w \cdot v_2)_1)/\sqrt{g}$$

ist, worin n den Einheitsvektor der Flächennormalen, v den der Tangente an die Kurve $v = \text{konst.}$, $w = n \times v$ bedeuten. Da man für die Christoffelsymbole die Gleichungen

$$\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ ik \end{smallmatrix} \right\} = - (n, \xi_2, \xi_{ik})/\sqrt{g}, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ ik \end{smallmatrix} \right\} = (n, \xi_1, \xi_{ik})/\sqrt{g}$$

hat, steht das Gewünschte schon da.

Harald Geppert (Berlin).

Hamburger, Hans: Beweis einer Caratheodoryschen Vermutung. I. Ann. of Math., II. s. 41, 63—86 (1940).

Verf. bringt einen Beweis der Carathéodoryschen Vermutung, daß eine überall reguläre geschlossene Fläche vom Geschlecht 0 mindestens 2 Nabelpunkte besitzt, zunächst unter einschränkenden Bedingungen, die in Teil II dieser Arbeit fallengelassen werden sollen. Für die in Frage kommenden Flächen wird eine spezielle Darstellung gegeben:

$$x = u - 2W \frac{W_u}{1 + W_u^2 + W_v^2}, \quad y = v - 2W \frac{W_v}{1 + W_u^2 + W_v^2}, \quad z = \frac{2W}{1 + W_u^2 + W_v^2}.$$

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien lautet dann:

$$W_{uv}(du^2 - dv^2) + (W_{vv} - W_{uu})du dv = 0.$$

Zur Diskussion dieser Gleichung werden in der u, v -Ebene Polarkoordinaten $u = \rho \cos \vartheta$, $v = \rho \sin \vartheta$ eingeführt. Wenn der Punkt $u = 0$, $v = 0$ Nabel und die u, v -Ebene Tangentenebene der Fläche ist, läßt W die Darstellung zu:

$$W(\rho, \vartheta) = \frac{\rho^2}{4R} + \rho^m(w_0(\vartheta) + F(\rho, \vartheta)), \quad \rho = \text{Radius der Schmiegekugel.}$$

Der Beweis wird nun unter der Voraussetzung geführt, daß $w_0(\vartheta)$, $F(\rho, \vartheta)$ dreimal stetig differenzierbar sein sollen, und $\lim_{\rho \rightarrow 0} F(\rho, \vartheta) = 0$. Von $w_0(\vartheta)$ wird noch stark einschränkend gefordert, daß $\partial w_0(\vartheta)/\partial \vartheta$ nur isolierte Nullstellen, $w_0(\vartheta)$ nur Nullstellen 1. und 2. Ordnung besitzen. Unter diesen Annahmen wird die Vermutung noch erheblich verschärft. Es wird nämlich gezeigt, daß für den Index i eines Nabels immer gilt: $i \geq 0$. Als Spezialfall ist hierin der Beweis der Vermutung enthalten, da zwischen dem Geschlecht p einer Fläche und den Indizes i_σ der singulären Stellen eines die Fläche überdeckenden Kurvennetzes die Beziehung besteht:

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty} \left(\frac{i_\sigma}{4} - 1 \right) = 2p - 2.$$

Der Index eines singulären Punktes eines Netzes wird dabei folgendermaßen definiert: Man lege um ihn einen geschlossenen, einen einfach zusammenhängenden Bereich abgrenzenden Polygonzug, dessen Seiten abwechselnd der einen und der anderen Netzschar angehören. Eine Ecke heiße einspringend, wenn beide die Ecke bildenden Polygonseiten sich in das Innere des Bereiches fortsetzen lassen, andernfalls heiße sie ausspringend. Der Index ist dann gleich der Anzahl der ausspringenden vermindert um die Anzahl der einspringenden Ecken. Diese Definition wird bei der Untersuchung der singulären Stellen einer beliebigen Differentialgleichung der Gestalt (1) $X(du^2 - dv^2) + 2Ydudv = 0$, oder in Polarkoordinaten $A(d\rho^2 - \rho^2 d\vartheta^2) + 2B\rho d\rho d\vartheta = 0$, zugrunde gelegt. Es wird angenommen, $u = 0$, $v = 0$ sei eine singuläre Stelle, für die gilt $X = 0$, $Y = 0$. In der ρ, ϑ -Ebene bildet sich ein die singuläre Stelle umgebender Bereich der oben angegebenen Art ab auf einen Bereich, dessen Begrenzung gebildet wird von einem Stück der ρ -Achse, einem Polygonzug und zwei Kurvenstücken, die

so gewählt werden mögen, daß längs ihnen A verschwindet. Dieser Bereich wird weiter durch Kurvenstücke, längs denen A verschwindet, in Teilgebiete zerlegt, und die in ihnen verlaufenden Polygonzugstücke werden auf ihre ein- und ausspringenden Ecken hin untersucht. Auf diese Weise wird dann auch eine analytische Darstellung des Index gewonnen. Die Anwendung dieser Ergebnisse auf die Gleichung (1) liefert dann leicht die bereits erwähnten Ergebnisse. *Knothe* (Berlin-Wilmersdorf).

Losada y Puga, Cristóbal de: Sur la trigonométrie des petits triangles curvilignes plans. Bull. Soc. Math. France **67**, 132—136 (1939).

En partant des résultats obtenus par M. Levi-Civita dans les recherches trigonométriques des petits triangles curvilignes (Conférences de la Réunion Internationale des Mathématiciens, Paris, Gauthier-Villars 1939) l'auteur substitue aux éléments (employés par M. Levi-Civita) d'un triangle plan, dont les côtés sont des arcs de cercle, la corde et la flèche. Il parvient ainsi aux formules analogues à celles de M. Levi-Civita [cfr. Levi-Civita, Rend. Semin. mat. fis. Milano **12**, 1—33 (1938); dies. Zbl. **22**, 395]. *Hlavatý* (Prag).

Cernov, Nicolas M.: Sur les surfaces congruentes à leurs parallèles. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. **26**, 161—182 (1940).

P. Mercatanti hat die Flächen bestimmt, die zu allen ihren Parallellflächen kongruent sind (wie z. B. die Ebene und der Drehkegel). Es kommen die Evolventenflächen der Drehflächen, Schraubenflächen und Zylinderflächen heraus (Giorn. Mat. Battaglini **1907**, 16—26). Hier wird dieses Ergebnis erreicht, indem von den beiden Fundamentalformen der Fläche $r(u, v)$ und ihrer Parallellfläche im Abstand λ $\mathfrak{R}(uv) = r(uv) + \lambda n(uv)$ ausgegangen wird. Wenn die Fläche auf ihre Krümmungslinien als Parameter bezogen wird, ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für die Kongruenz mit ihrer Parallellfläche, daß zwei Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ vier Bedingungen genügen müssen, die neben φ und ψ die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung von $r(u, v)$, E, G, D', D'' , und ihre Ableitungen nach u und v enthalten. Die Durchführung des Beweises ergibt die Mercatantischen Fälle.

Heinrich Schatz (Innsbruck).

Salini, Ugo: Intorno alla superficie Ω di Demoulin. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **19**, 125—140 (1940).

Verf. untersucht die Demoulin'schen Flächen F mit der Eigenschaft, daß sich zu ihnen Flächen finden lassen, auf denen die Torsen der Normalenkongruenz von F ein doppeltes Kurvensystem mit gleichen Invarianten ausschneiden. Er untersucht weiterhin den Fall, in dem unendlich viele Flächen existieren, die ein derartiges doppeltes Kurvensystem ausschneiden, sowie die Wirkung einer Lieschen Transformation (die die Krümmungslinien in Asymptotenlinien überführt) auf die Flächen.

E. Bompiani (Roma).

Ermolaev, L.: Image projective d'une surface. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **26**, 735—737 (1940).

In uno spazio proiettivo a tre dimensioni è data una coppia di superficie S e Σ e una corrispondenza fra i loro punti. Siano M ed N punti corrispondenti e la retta MN non tocchi S nè Σ . Ad ogni tangente l ad S in M si faccia corrispondere la tangente l' che incontra la tangente in N a Σ corrispondente ad l . Si ha una proiettività P nel fascio tangente in M . Procedendo dualmente si ha una proiettività T . L'A. studia varie questioni relative a P e a T : p. es. caso in cui P è un'involuzione e le sue rette doppie sono coniugate nel senso di Dupin; caso in cui S e Σ siano involuppo di uno stesso sistema di quadriche di Darboux; o di Lie. Si veda anche S. Finikoff (questo Zbl. **22**, 396).

E. Bompiani (Roma).

Mayer, O.: Sur les surfaces réglées. III. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. **26**, 299—308 (1940).

Com'è ben noto, sopra una superficie rigata dello spazio proiettivo esistono sistemi R_{∞^1} di curve tali che: per ogni punto della superficie passa una sola curva di R ,

le curve di R tagliano due generatrici qualunque in punti che si corrispondono omograficamente. Se $u = \text{cost}$ sono le generatrici e $v = \text{cost}$ le curve d'una famiglia R , la superficie è rappresentata dalle $x = y(u) + vz(u)$ e ogni famiglia R da

$$\frac{a_{11}v + a_{12}}{a_{21}v + a_{22}} = \text{cost}, \quad a_{ij} = a_{ij}(u).$$

L'A. determina i tre differenziali invarianti indipendenti di due famiglie R e i due differenziali invarianti indipendenti di una famiglia R e di una coppia di curve (l'invarianza va intesa rispetto ai cambiamenti di parametri $u_1 = U(u), v_1 = \frac{m_{11}v + m_{12}}{m_{21}v + m_{22}}, m_{ij} = m_{ij}(u)$). A tal fine introduce la nozione di coppia di contatto di due famiglie R e di coppia trasformata di una data coppia di curve rispetto ad una famiglia R assegnata; si trattiene poi su alcuni problemi relativi agli enti introdotti. L'A. osserva infine che, per una superficie rigata dello spazio ordinario, la coppia trasformata delle flecnodali rispetto alle asintotiche è la coppia di curve del complesso e applica quindi i risultati precedenti al calcolo degli invarianti proiettivi della superficie.

Mario Villa (Bologna).

Weitzenböck, R.: Über assoziierte Geraden bei Regelflächen im R_4 . Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 43, 325—333 (1940).

Mit vier erzeugenden Geraden G_1, G_2, G_3, G_4 einer zweidimensionalen Regelfläche F eines vierdimensionalen Raumes R_4 ist projektiv invariant eine fünfte „assozierte“ Gerade G_5 verbunden. Jede Ebene, welche die ersten vier Geraden schneidet, trifft auch die fünfte assoziierte. Läßt man die vier Geraden G_i in der Fläche F gegen eine Erzeugende a konvergieren, so nähert sich auch die assoziierte Gerade G_5 einer Grenzlage g . Von Ausnahmen abgesehen, erhält man so zu jeder Erzeugenden a von F eine assoziierte Gerade g . Deren Inbegriff bildet die zu F „assozierte Regelfläche“. Die Arbeit ermittelt nun unter Verwendung der symbolischen Methoden die Gleichung der assoziierten Geraden g , falls die a auf F durch ihre zehn Linienkoordinaten $a_{ik} = a_{ik}(t)$ gegeben sind. In die nötigen Rechnungen gehen Potenzreihen bis zu Gliedern dreißigster Ordnung ein.

K. Strubecker (Wien).

Schneidt, Max: Von Translationsflächen erzeugte Ribaucoursche Strahlensysteme. Mh. Math. Phys. 49, 109—123 (1940).

Es seien die Parameterkurven der Ausgangsbrennfläche $r = r(u, v)$ Schattengrenzlinien ($v = \text{konst.}$) und die zu ihnen konjugierten Kurven ($u = \text{konst.}$). Verf. betrachtet die von den Tangenten der Kurven $v = \text{konst.}$ gebildeten Strahlensysteme (S), falls sie gleichzeitig auch Tangenten von Schattenlinien $u = \text{konst.}$ der zweiten Brennfläche $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(u, v)$, d. h. die Gratlinien ihrer abwickelbaren Flächen auf beiden Brennflächen Schattengrenzen sind. Sie gehen aus einer beliebigen Translationsfläche $\bar{r} = \mathfrak{U}(u) + \mathfrak{V}(v)$ hervor und sind Ribaucoursche Strahlensysteme. Sie sind Normalsysteme, wenn die Parameterkurven auf der erzeugenden Translationsfläche Komplexkurven sind, und bestehen dann aus den Normalen der Flächen mit zwei Scharen von ebenen Krümmungslinien.

Volk (Würzburg).

Takeda, Kusuo: On line congruences. IV. Tôhoku Math. J. 46, 267—283 (1940).

In Fortsetzung seiner früheren Arbeit [Tôhoku Math. J. 46, 46—67 (1939); dies. Zbl. 22, 261] zeigt Verf., daß es ∞^2 oskulierende kubische Komplexe (C^3) gibt, die die Kongruenz in sechster Ordnung berühren. Jeder C^3 zerfällt in einen quadratischen und einen linearen Komplex. Durch den betrachteten Strahl der Kongruenz gehen sieben Fortschreitungsrichtungen, längs deren ein C^3 in siebenter Ordnung berührt wird. Verf. wendet sich dann zur Untersuchung der Regelflächen der Kongruenz, insbesondere der Knotenpunkte und Tangenten. Schließlich werden ein ausgezeichnete quadratischer und kubischer Berührungskomplex bestimmt und die Fortschreitungsrichtungen der Kongruenz in bezug auf diese Komplexe diskutiert.

W. Haack (Karlsruhe).

Roupscheff, I. A.: La méthode des variations complexes dans la géométrie sphérique cinématique. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 323—326 (1940).

Eine analytische Methode zur Untersuchung sphärischer kinematischer Mechanismen. Den Ausgangspunkt bildet die Riemannsche Kugel und die Cayleysche Formel betreffend die Bewegungen der Kugel in sich selbst. Es werden zwei solche Kugeln mit demselben Mittelpunkt und gleichen Radien betrachtet, von denen die eine mit dem beweglichen, die andere mit dem festen System verbunden ist. Die Cayleysche Formel samt weiteren die Bewegung näher bestimmenden Bedingungen gibt den Zusammenhang zwischen den beiden komplexen Zahlen, die die Lage eines Punktes auf der beweglichen bzw. festen Kugel bestimmen. Es werden z. B. Formeln für die rollende Bewegung ohne und mit Gleitung einer sphärischen Kurve auf einer anderen abgeleitet.

O. Borůvka (Brünn).

Strubecker, Karl: Komplexe Geometrie und aufrechte Ellipsenbewegung. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 50, Abt. 1, 43—58 (1940).

Den Sonderfall der Darbouxsschen Ellipsenbewegung, bei der auch die Umkehrung von derselben Art ist, hat J. Krames eine aufrechte Ellipsenbewegung genannt. Dabei geht eine Achse a in sich über, und die Raumpunkte beschreiben Ellipsen auf Drehzylindern mit der Achse a . Die bei dieser Bewegung von einer Geraden beschriebene Regelfläche Θ hat J. Krames (s. dies. Zbl. 17, 82, 370) eingehend behandelt. In der vorliegenden Arbeit wird auf die Bedeutung von Θ in der komplexen und dualkomplexen Geometrie, insbesondere Studyschen Kinematik, hingewiesen. Der Inbegriff der Windungen um eine feste Achse hat den Zusammenhang eines dualbinären Gebietes. Einer Staudtschen Kette in diesem Gebiet entspricht eine aufrechte Ellipsenbewegung. Bildet man mit E. Study die Raumgeraden auf die Punkte der dualen Kugel ab, so entspricht Θ einer Kette auf einem Kleinkreis dieser Kugel und kann in diesem Sinne als zyklische Strahlkette bezeichnet werden. Die Anwendung des Studyschen Übertragungsprinzips liefert den Satz von J. Krames, daß Θ durch Spiegelung einer Geraden an den Erzeugenden eines Plückerschen Konoids erzeugt werden kann. Die reellen Speere der ∞^2 durch einen komplexen Punkt gehenden Minimalebene bilden eine Speerkongruenz, die W. Blaschke eine Speergarbe genannt hat. Ihre Trägergeraden sind die Erzeugenden eines Systems konfokaler Drehhyperboloide, bilden also eine isotrope Kongruenz. Die Speergarbe ist ein komplexbinäres Gebiet, dessen Ketten nach J. Grünwald und W. Blaschke den obigen Regelflächen Θ entsprechen.

E. Kruppa (Wien).

Krames, Josef: Über die durch aufrechte Ellipsenbewegung erzeugten Regelflächen Θ . Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 50, Abt. 1, 58—65 (1940).

Verf. hat in früheren Arbeiten (s. dies. Zbl. 17, 82 u. 370) die von einer Geraden durch aufrechte Ellipsenbewegung erzeugte rationale Regelfläche 4. Grades Θ eingehend behandelt. Die oben besprochene Arbeit von K. Strubecker gab ihm eine Veranlassung, diese Untersuchungen im Hinblick auf die bekannte Tatsache weiterzuführen, daß Θ der isotropen Kongruenz angehört, die von den Erzeugenden einer konfokalen Schar von Drehflächen 2. Grades gebildet wird. — Darüber hinausgehend ergibt sich der allgemeine Satz: Besitzt eine Regelfläche Φ eine ebene Striktionslinie, die auch als Fußpunktkurve für einen Punkt ihrer Ebene als Pol erhalten wird, so liegt Φ in einer isotropen Kongruenz, welche diese Ebene zur Mittelfläche hat und daher nach einem Satz von E. Müller von der oben erklärten Art ist.

E. Kruppa (Wien).

Pinl, M.: Zur Theorie der halbisotropen Flächen in R_4 . Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 50, Abt. 1, 65—78 (1940).

Verf. untersucht die Flächen des euklidischen Raumes R_4 , deren Minimalkurven zusammenfallen. Verf. ist der Meinung, durch Beispiele die Existenz der verschiedenen Typen solcher Flächen belegen zu können, bemerkt aber nicht, daß sein erstes Beispiel eine Regelfläche liefert; auch weitere seiner Ergebnisse sind falsch. E. Bompiani.

Lense, Josef: Längentreue Abbildung, isotrope Mannigfaltigkeiten vom Rang null, Einbettungssatz. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 50, Abt. 1, 1—6 (1940).

Considerazioni comparative sulle varietà isotrope, considerate dal Lense e dal Pinl, e sulle geometrie riemanniane di specie superiore considerate dal Bompiani; e sui teoremi d'immersione (in uno spazio euclideo) di varietà con dato elemento lineare.

E. Bompiani (Roma).

Buzano, Piero: Bericht über die projektive Geometrie der partiellen Differentialgleichungen. Abh. math. Semin. Hansische Univ. 13, 257—272 (1940).

Verf. gibt einen Gesamtüberblick über die von der italienischen Schule unter Führung von E. Bompiani in der projektiven Geometrie der partiellen Differentialgleichungen gefundenen Ergebnisse. Verf. erläutert erst einige von Bompiani eingeführte Grundbegriffe und erwähnt dann die Hauptsätze bezüglich derjenigen Flächen, die einer linearen homogenen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung (Laplacesche Gleichung) genügen. Weiterhin erläutert er den ebenfalls von Bompiani eingeführten grundlegenden Begriff der Quasiasymptotenlinien und erörtert insbesondere die Charakterisierung der Mannigfaltigkeiten durch Quasiasymptotenlinien an Hand der Untersuchungen von Bompiani (vgl. dies. Zbl. 20, 63), von Enea Bortolotti (vgl. dies. Zbl. 16, 74) und von Villa (vgl. dies. Zbl. 19, 138; 19, 367; 20, 258; 20, 391; 22, 168; 22, 169). Weiterhin behandelt Verf. die neueren Untersuchungen Bompianis über die Klassifikation der Quasiasymptotenlinien und über die zu einem System von Quasiasymptoten assoziierten invarianten Systeme (vgl. dies. Zbl. 20, 259), Bompianis projektive Klassifikation der Flächen, die zu Differentialsystemen beliebiger Ordnung gehören (vgl. dies. Zbl. 2, 393; 3, 25), und ihre Anwendung in den Riemannschen Geometrien höherer Gattung (vgl. dies. Zbl. 11, 418). Zum Schluß bespricht Verf. die Untersuchungen über diejenigen mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten, die Systemen von Laplaceschen Gleichungen genügen, wobei er auch einige eigene Ergebnisse (vgl. dies. Zbl. 12, 224; 20, 71) beleuchtet.

Mario Villa (Bologna).

Gericke, H.: Zur Differentialgeometrie von Flächen im n -dimensionalen euklidischen Raum. Adjungierte Extremalflächen. Math. Z. 46, 408—459 (1940).

Haar [Math. Ann. 100, 481 (1928)] und Berwald (dies. Zbl. 1, 339) haben die Lehre von den adjungierten Minimalflächen des dreistufigen Euklidischen Raumes E_3 auf die Extremalen gewisser Doppelintegrale verallgemeinert; Ref. hat einen Teil dieser Verallgemeinerung auf den E_4 übertragen (dies. Zbl. 13, 417). Dem Verf. gelingt es, alle bisher im E_3 und E_4 erzielten Ergebnisse auf den E_n auszudehnen. Dabei erhält auch die bisher im E_4 noch verschleierte Rolle der auftretenden Gebilde verschiedener Stufenzahl. — Als rechnerisches Hilfsmittel dienen dem Verf. nicht die Tensorrechnung, sondern Formeln der Grassmannschen Ausdehnungslehre; sie erlaubt, das äußere Produkt von $r \leq n$ Vektoren bequem und anschaulich zu verwenden. Diesem gilt Kap. 1. Kap. 2 ist der Differentialgeometrie der Flächen \mathfrak{F}_n^2 im E_n gewidmet und hat selbständige geometrische Bedeutung. Verf. untersucht zuerst die Torsen mit ihren Gratlinien; er zeigt, daß längs einer Kurve des E_n genau die ersten $r (\leq n - 2)$ Vektoren des n -Beins eine Torse bilden. Zur allgemeinen Flächenlehre übergehend, führt er die Grundgrößen ein und stellt die Ableitungsgleichungen auf. Von Flächenkurven behandelt er die Asymptotenlinien (A.L.). Im E_4 sind das die Kurven, die in jedem Punkt die Richtung nach den unendlich fernen Punkten seiner Kommerellschen Charakteristik haben; ihre Differentialgleichung läßt sich auf den E_n übertragen. Gibt es auf \mathfrak{F}_n^2 zwei Scharen von A.L., so bilden diese entweder ein konjugiertes Netz, oder \mathfrak{F}_n^2 ist auf eine \mathfrak{F}_3^2 abwickelbar. Unter Haupttangentenkurven (H.T.K.) versteht Verf. Linien mit der Eigenschaft, daß ihre Schmiegeebene σ mit der Tangentenebene τ der \mathfrak{F}_n^2 zusammenfällt. Jede H.T.K. ist eine A.L., aber nicht umgekehrt. Flächen, auf denen es eine Schar von H.T.K. gibt, sind durch eine partielle Differentialgleichung gekennzeichnet; zwei Scharen solcher gibt es nur dann, wenn sich \mathfrak{F}_n^2 auf eine \mathfrak{F}_3^2 abwickeln läßt. Entsprechend den $n - m$ verschiedenen senkrechten

Einheitsvektoren ξ_λ , die die Normal- E_{n-m} der \mathfrak{F}_n^2 aufspannen, führt Verf. die λ -Krümmungslinien (K.L.) ein. Schließlich nennt er zwei Möglichkeiten relativer Geometrie: Erstens kann man das Gebilde $\mathfrak{N} = \xi_1 \times \cdots \times \xi_{n-2}$, eine Fläche des $E_{(n-2)}$, durch eine Eichfläche ersetzen; zweitens auch die Fläche ξ_λ , die auf der Einheitskugel \mathfrak{P}_n des E_n liegt. — Jetzt wendet sich Verf. zur Variationsrechnung, und zwar zu der Aufgabe (\mathfrak{B}) $\delta \int \int F(\mathfrak{P}) du^1 du^2 = 0$, wo $\mathfrak{P} = \mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_i = \partial \mathfrak{x} / \partial u^i$. Er erklärt die Adjungiertheit der Fläche $\bar{\mathfrak{x}}$ zu \mathfrak{x} , der Variationsaufgabe \mathfrak{B} zu \mathfrak{B} und weist $\bar{\mathfrak{x}}$ als Extremale von \mathfrak{B} nach; diese Zusammenhänge, die schon Sakellariou (dies. Zbl. 22, 55) gefunden hat, gestaltet Verf. sehr übersichtlich, indem er der \mathfrak{B} eine Indikatrix und eine Figuratrix beigibt, die beim Übergang von \mathfrak{B} zu $\bar{\mathfrak{B}}$ ihre Rollen vertauschen. Er klärt auf, warum die Theorie sich nicht auf \mathfrak{F}_n^m , $m > 2$, übertragen läßt. — Dann dringt Verf. zu seinen wichtigsten und schönsten Ergebnissen vor, wie man solche bisher nur im E_3 kannte: In der relativen Geometrie in bezug auf \mathfrak{E}^* (= Ergänzung von \mathfrak{E}) entsprechen den \mathfrak{E}^* -K.L. von \mathfrak{x} die H.T.K. von $\bar{\mathfrak{x}}$. Dieser Aussage haftet der Mangel an, daß es solche Linien nicht immer gibt. Er läßt sich beheben, wenn man die Anforderung an die \mathfrak{E}^* -K.L., daß längs ihnen die \mathfrak{E}^* Torsen bilden, ermäßigt: Man zeichnet in \mathfrak{E}^* einen Vektor e aus, was bei besonderen Aufgaben \mathfrak{B} , z. B. wenn $\mathfrak{E} \times \mathfrak{P} = 0$, auf natürliche Weise möglich ist, und erklärt als e -K.L. solche Kurven, längs denen die von e gebildete Regelfläche auf eine Fläche des E_{n-1} abwickelbar ist. In der auf e bezogenen Geometrie entsprechen den e -K.L. von \mathfrak{x} Kurven von $\bar{\mathfrak{x}}$, an denen σ zwar nicht in τ fällt, aber in einen τ enthaltenden E_{n-1} . Verf. führt solche Untersuchungen bei Aufgaben \mathfrak{B} mit $\mathfrak{E} \times \mathfrak{P} = 0$ für $n = 4$ im einzelnen durch und findet z. B., daß in bezug auf ξ und e den K.L. von \mathfrak{x} die A.L. von $\bar{\mathfrak{x}}$ entsprechen. — Weiter verallgemeinert er auf E_n die von Berwald in E_3 , vom Ref. in E_4 angegebene Maßbestimmung m , die die Abbildung von \mathfrak{x} auf $\bar{\mathfrak{x}}$ zu einer Verbiegung macht — aber nicht die von Haar in E_3 aufgestellte, was Ref. gleichfalls wichtig fände. Der Nachweis, daß m für $F = \sqrt{\mathfrak{P}^2}$ das gewöhnliche Bogenelement liefert, gelingt überraschend einfach. — Zum Schluß gibt Verf. in E_4 das Seitenstück der Legendreschen Bedingung an: Die quadratische Form, deren Vorzeichen die zweiten Ableitungen von F nach den Bestimmungszahlen P_{ik} von \mathfrak{P} sind, soll halb-entschieden positiv sein und nur verschwinden, wenn ihre Veränderlichen den P_{ik} paarweise gleich sind. Diese Annahme verbürgt, daß \mathfrak{x} einen Kleinstwert liefert, und daß die Figuratrix (eine \mathfrak{F}_6^2) eine in bezug auf $\mathfrak{P}/\sqrt{\mathfrak{P}^2}$ positive Gaußsche Krümmung hat. Koschmieder (Graz).

Usunoff, Nicolas: Über das vierdimensionale Problem der Riccikurven im Riemannschen Raum. Mh. Math. Phys. 49, 124—152 (1940).

Sia R_{hk}^i , il tensore di Riemann relativo ad un $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ ad n dimensioni; $R_{hk} = R_{hk}^i$, il tensore di Ricci e $\varrho = R_{hk} dx^h dx^k / g_{hk} dx^h dx^k$; vi sono in generale n direzioni, mutuamente ortogonali, per le quali ϱ acquista valori estremi: esse sono le direzioni principali di Ricci [Ist. Ven. Atti 63 (1904)] e si hanno quindi n congruenze ortogonali di curve di Ricci. Inversamente: date in uno spazio numerico X_n n congruenze di linee, è possibile farne uno spazio di Riemann (cioè determinare un ds^2) tale che le congruenze date siano le sue congruenze di Ricci? Per $n = 3$ il problema è stato risoluto da P. Walberer [Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 10 (1934); questo Zbl. 9, 327]. L'A. tratta il caso $n = 4$. Se le congruenze sono definite annullando quattro pfaffiani ω_α , in ciascuno dei quali si può introdurre un fattore arbitrario $1/\lambda_\alpha$, si costruiscono subito ds^2 per i quali le congruenze date sono ortogonali e i loro simboli di Ricci: bisogna determinare le λ_α in modo che le linee date risultino linee di Ricci. Ciò porta a sei equazioni differenziali non lineari del secondo ordine per le λ_α , delle quali bisognerebbe poi scrivere le condizioni d'integrabilità. Data la loro complicazione l'A. ricerca quegli spazi di Riemann per i quali le congruenze date sono anche geodetiche. Le relazioni fra i coefficienti di rotazione del Ricci in

questa ipotesi permettono di condurre a termine l'integrazione, dando luogo a cinque casi diversi.

E. Bompiani (Roma).

Thomas, T. Y.: Some simple applications of Green's theorem for compact Riemann spaces. Tôhoku Math. J. 46, 261—266 (1940).

Let φ be a scalar in a Riemann $n(\geq 2)$ dimensional oriented compact space R . Then by Green's theorem we have $\int_R \Delta_2 \varphi dv = 0$, $(\Delta_2 \varphi = g^{ab} \varphi_{,a,b})$ and consequently, if $\Delta_2 \varphi = c\varphi$ ($c = \text{const}$) $2c \int_R \varphi^2 dv + 2 \int_R \Delta_1 \varphi dv = 0$, $(\Delta_1 \varphi = g^{ab} \varphi_{,a} \varphi_{,b})$. For $c > 0$ it therefore follows $\varphi = 0$. If $c = 0$ we have $\varphi = \text{const}$ over R . The author gives some simple applications of this result, for instance: Two conformally equivalent oriented compact Riemann spaces (with the metric tensors g_{ab} and \bar{g}_{ab}) of class $m \geq 2$ and dimensionality $n \geq 2$, which have zero Gaussian curvature have $\bar{g}_{ab} = e^c g_{ab}$ ($c = \text{const}$).
Hlavatý (Prag).

Hokari, Shisanji: Die Theorie des Kawaguchischen Raumes mit der Maßbestimmung von einer bestimmten Gestalt. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math. 8, 63—78 (1940).

On considère la classe d'espaces de Kawaguchi

$$(1) \quad s = \int f^{\frac{1}{p}} dt, \quad f = \sum_{\alpha=0}^K \binom{K}{\alpha} b_{\alpha} S^{K-\alpha}, \quad S = a_i \frac{d^m x^i}{dt^m}, \quad b_0 = 1,$$

$\binom{K}{\alpha}$ étant les coefficients binomiales et b_{α} étant des fonctions qui dépendent des x^i et des dérivées d'ordre inférieur à m . Cette classe échappe à la théorie générale, à cause du fait que le tenseur g_{ij} , qu'on peut associer, est à déterminant nul. L'étude direct des espaces (1) consiste à considérer les $K-1$ invariants

$$B_{\gamma} = b_{\gamma} - (b_1)^{\gamma} - \sum_{\delta=2}^{\gamma-1} \binom{\gamma}{\delta} B_{\delta} b_{\gamma-\delta} \quad (\gamma = 2, 3, \dots, K)$$

qui dépendent seulement des dérivées d'ordre $m-1$ et les K invariants

$$f_{\beta} = \sum_{\alpha=0}^{\beta} \binom{\beta}{\alpha} b_{\alpha} S^{\beta-\alpha} \quad (\beta = 1, 2, \dots, K)$$

qui dépendent aussi des dérivées d'ordre m , f_K étant égal à f . Si les invariants B_{γ} sont tous nuls, K peut être considéré égal à l'unité. On montre qu'on peut, en tous cas, associer à l'espace une connexion affine, qui dépend seulement des K invariants f_1, B_2, \dots, B_K .
G. Vranceanu (București).

Sasaki, Shigeo: On the theory of surfaces in a curved conformal space. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 28, 261—285 (1940).

Verf. hatte in einer vorhergehenden Arbeit (dies. Zbl. 20, 260) die Kurventheorie im gekrümmten konformen Raum nach insbesondere von T. Y. Thomas entwickelten Methoden bearbeitet. Daran schließt sich jetzt in vorliegender Arbeit eine Darstellung der Theorie der Hyperflächen \mathfrak{C}_{n-1} im konformen gekrümmten \mathfrak{C}_n mit dem Ziel, Analoga der gewöhnlichen Flächentheorie, nämlich konforminvariante Gauß- und Weingartengleichungen samt zugehörigen Gaußschen und Mainardi-Codazzischen Integrabilitätsbedingungen zu gewinnen. Der erste Abschnitt enthält die notwendigen formalen und gruppentheoretischen Vorbereitungen. Unter Verwendung der „Kern-Index-Methode“ nach J. A. Schouten wird zunächst der relative konforme Fundamentaltensor

$$\mathfrak{C}_{A'B'} = A^{-\frac{2}{n}} \mathfrak{C}_{AB} A^A_{A'} A^B_{B'} \quad A, B, \dots = 1, 2, \dots, n, n+1$$

eingeführt. Er besitzt das Gewicht $-\frac{2}{n}$. Daran schließen sich Ausführungen über die

im konformen Raum zugrunde liegende Übertragung und deren Parameter $\Gamma_{\alpha\beta}^C$. Im zweiten Abschnitt erfolgt die Einbettung von Hyperflächen \mathfrak{C}_{n-1} in \mathfrak{C}_n durch Gleichungen der Form $X^i = X^i(x^1, x^2, \dots, x^{n-1})$, $i = 1, 2, \dots, n$. Die durch die Einbettung aus \mathfrak{C}_n auf \mathfrak{C}_{n-1} erzeugten Skalare, Vektoren und Tensoren zeigen in doppelter Weise relativ invariantes Verhalten, charakterisierbar durch die entsprechenden Gewichtspaare, z. B. $\left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)$, wo etwa $\frac{-1}{n}$ das „äußere“ Gewicht der betreffenden Größe darstellt, während $\frac{1}{n-1}$ das „innere“ Gewicht bedeutet, $\frac{-1}{n}$ also sich auf Transformationen in \mathfrak{C}_n , $\frac{1}{n-1}$ auf solche in \mathfrak{C}_{n-1} bezieht. Invarianten gegenüber beiderlei Transformationen werden intrinsek genannt. Nach einer geometrischen Deutung der ersten $(n+1)$ kontravarianten konformen Fundamentalvektoren einer \mathfrak{C}_{n-1} in \mathfrak{C}_n wird im Anschluß an bekannte Methoden von T. Y. Thomas die Theorie der sog. vollständigen konformen Differentiation und ihrer Eigenschaften dargestellt. Dabei erscheint einem jeden konformen Tensor eine numerische Invariante K zugeordnet, deren Nichtverschwinden die Möglichkeit der sog. vollständigen kovarianten Differentiation im Sinne der typischen Formel

$$v_{(B)(Q), A}^{(A)(P)} = \frac{n-1}{K} G^{ab} v_{(B)(Q), a; b}^{(A)(P)}$$

garantiert. Da die vollständigen konformen Ableitungen eines Satzes von konformen Basisvektoren in \mathfrak{C}_n wiederum konforme Vektoren in \mathfrak{C}_n darstellen, muß eine Linear Darstellung vermöge der Basisvektoren existieren. Dieser Ansatz führt auf die gesuchten Analogien zu den Gaußschen und Weingartenschen Gleichungen, wobei die Koeffizientensysteme der Darstellung konforme Tensoren von den Gewichten $\left(0, \frac{1}{n-1}\right)$ bzw. $(0, 0)$ darstellen, welchen die gleiche Charakteristik $5 - n$ zukommt. Die Integrabilitätsbedingungen dieser Linearkombinationen führen dann schließlich auf konforme Seitenstücke zu Gauß', Mainardis und Codazzis Relationen. *M. Pinl* (Augsburg).

Cieco, John de: The analogue of the Moebius group of circular transformations in the Kasner plane. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 936—943 (1939).

Die Arbeit gehört in das Gebiet von Kasners „Conformal geometry“. Nach Erklärung einiger Grundbegriffe dieser Geometrie wird das Problem behandelt, alle Transformationen zu finden, welche jeden parabolischen Kreis ($y'' = 0$) der Kasnerschen Ebene wieder in einen solchen verwandeln. Es ergibt sich die 7-gliedrige Gruppe

$$X = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad Y = \frac{ey + fx^2 + gx + h}{(cx + d)^2},$$

die dann im Kasnerschen Sinne noch weiter untersucht wird. *Kowalewski* (Prag).

Hokari, Shisanji: Zur neuen Behandlung der Geometrie des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math. 8, 47—62 (1939).

On considère le problème de la géométrisation des systèmes différentiels

$$\frac{d^m x^i}{dt^m} + H^i\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}\right) = 0,$$

ou bien la recherche des invariants de ces systèmes par rapport aux transformations de variables $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$, $\bar{t} = \bar{t}(t)$. On montre que les deux connexions affines qu'on peut associer au système, dépendent des fonctions H^i et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre m , tandis que chez Kawaguchi et Hombu (ce Zbl. 17, 425), elles dépendent aussi des dérivées d'ordre $m+1$. Les résultats sont obtenus en employant d'une manière systématique la méthode des variations. Une attention spéciale est faite au cas où $m = 3$, quand on peut associer au système trois connexions affines.

G. Vranceanu (Bucureşti).

Chern, Shiing-Shen: Sur la géométrie d'un système d'équations différentielles du second ordre. Bull. Sci. math., II. s. 63, 206—212 (1939).

Given a differential system

$$(1) \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} + F^i \left(\frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt}; x^1, \dots, x^n; t \right) = 0,$$

we can consider the problem of the invariants in respect to the transformations of variables $x'^i = f^i(x^1, x^2, \dots, x^n, t)$. The A. reduces this problem to the invariants of a space with affine connexion, by using the method of Cartan. The system (1) is equivalent to the pfaffian system $ds^h = dx^h - y^h dt = 0$, $ds^{n+h} = dy^h + F^h(y, x, t) dt = 0$ and the forms $ds^h, ds^{n+h}, ds^0 = dt$ are determined by the group

$$(2) \quad d\bar{s}^h = c_k^h ds^k, d\bar{s}^{n+h} = b_k^h (ds^{n+k} + a_i^k ds^i), d\bar{s}^0 = ds^0,$$

when c_k^h, b_k^h, a_i^k are functions of x, y, t . The system $ds^h = 0$ is an invariant of the problem and the canonical form of the covariants $\Delta s^h = ds^0 ds^{n+h} \pmod{ds^h}$ is conserved only by the group (2) for which $b_k^h = c_k^h$. If we choose also $a_i^k = \frac{1}{2} \frac{\partial F^k}{\partial y^i}$ the covariants $\Delta \bar{s}^{n+h}$ do not contain terms in $ds^0 d^{-n+h}$ and the corresponding forms are determined by the group

$$(3) \quad d\bar{s}^h = c_k^h ds^k, d\bar{s}^{n+h} = c_k^h ds^{n+k}, d\bar{s}^0 = ds^0.$$

This group conserves separatly the systems $ds^h = 0$, $ds^{n+h} = 0$ and then it possess a non holonomic affine connexion in the space of the $2n+1$ variables x, y, t . The A. considers also the particular case when the functions f^i are independent of t , paying particular attention to the case when F^i are homogeneous functions of the second order in y .

G. Vranceanu (București).

Masuyama, Motosaburô: Tensor characteristic of vector set and its application to geophysics. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 21, 647—655 (1939).

\mathfrak{B} ($\nu = 1 \dots N$) sei eine Vektorengesamtheit des R_3 , V_i ($i = 1, 2, 3$) bezeichne die Komponenten von \mathfrak{B} ; dann beschreibt Verf. die Gesamtheit durch den zweistufigen Tensor $[V_i V_j] = \sum_{\nu=1}^N V_{i\nu} V_{j\nu}$. Seine Invarianten

$$I_1 = \sum_{\nu=1}^N \mathfrak{B}^2, \quad I_2 = \sum_{\mu < \nu}^{1 \dots N} (\mathfrak{B} \times \mathfrak{B})^2, \quad I_3 = \sum_{\mu < \nu < \varrho}^{1 \dots N} (\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{B})^2$$

können als die ein- bzw. zwei- bzw. dreidimensionale Streuung der \mathfrak{B} gedeutet werden.

Die quadratische Fläche $\sum [V_i V_j] x_i x_j = \text{konst.}$ kann als Bild der Vektorgesamtheit dienen. Verf. macht eine Anwendung auf die täglichen Windvektoren eines Ortes, die während eines Monats beobachtet werden, und ihre Abbildung mittels einer Ellipse.

Harald Geppert (Berlin).

Cisotti, Umberto: Tensore isotropo o emisotropo di minimo scarto da un tensore assegnato. Ist. Lombardo, Rend., IV. s. 73, 85—93 (1940).

In dem dreidimensionalen Raum mit der Metrik $g_{ij} = \delta_{ij}$ bezeichnet man mit $A_{i_1 \dots i_m}^{(r)}$ ($r, s = 1, \dots, N$) die N linear unabhängigen Komponenten von $\delta_{i_1 k_1} \delta_{i_2 k_2} \dots \delta_{i_m k_m}$. Dann gilt (1) $\sum A_{i_1 \dots i_m}^{(r)} A_{i_1 \dots i_m}^{(s)} = 3^{N_r}$, ($N_r \leq m$), und jeder „isotrope“ Tensor π der Valenz $2m$ läßt sich mit Hilfe von N skalaren A_r ausdrücken (2) $\pi_{i_1 \dots i_m} \equiv \sum A_r A_{i_1 \dots i_m}^{(r)}$. Die tensorielle Differenz $\sigma \equiv \tau - \pi$ eines vorgegebenen Tensors $\tau_{i_1 \dots i_m}$ der Valenz $2m$ und eines isotropen Tensors (2) heißt ihre Abweichung (lo scarto). Somit ist (3) $S^2 \equiv \sum \sigma_{i_1 \dots i_m} \sigma_{i_1 \dots i_m}$ eine Funktion von A_r . Daraus läßt sich [mit Hilfe von (1)] unschwer zu jedem vorgegebenen Tensor τ ein isotroper Tensor π ausfindig machen, so daß S^2 zum Minimum wird. In ähnlicher Weise läßt sich das analoge Problem für $(m+1)$ -Vektoren lösen.

Hlavatý (Prag).

Klassische theoretische Physik.

Mechanik:

Skolem, Th.: Kleine Studie über transfinite Mechanik. Norsk mat. Tidsskr. 22, 5—9 (1940) [Norwegisch].

Verf. glaubt an Beispielen zeigen zu können, daß für ein System von unendlich vielen vollkommen elastischen Kugeln geeigneter Radien der Energieerhaltungssatz nicht gilt.

Bechert (Gießen).

Reisch, Paul: Periodische Lösungen des ebenen Dreikörperproblems in der Nähe der Lagrangeschen Dreieckslösung. Math. Z. 45, 289—311 (1939) u. München: Diss. 1939.

Im Anschluß an Untersuchungen von Perron leitet Verf. nochmals die von H. E. Buchanan gefundenen (aber nicht als reell bewiesenen) periodischen Bahnen in der Nähe der Dreieckslösung des ebenen Dreikörperproblems her. Im Gegensatz zu Buchanan benutzt Verf. komplexe Größen nur als zusammenfassende Schreibweise für reelle Beziehungen. Berichtigt wird auch die Anwendung des Energiesatzes, der zusammen mit dem Flächensatz dazu dient, zwei der Periodizitätsbedingungen als Folge der übrigen zu erkennen. Ref. würde diesen Schluß gern ohne Rechnung, einfach auf Grund der Invarianz der Hamiltonschen Wirkung gegenüber Drehung bzw. Translation der Zeitvariablen durchgeführt sehen; vgl. dazu Math. Z. 31, 230f. (1929).

E. Hölder (Braunschweig).

Wintner, Aurel: On the almost periodic behavior of the lunar node. Amer. J. Math. 62, 49—60 (1940).

Die Arbeit ordnet das von Levi-Civita erkannte Zusammenfallen der beiden Definitionen der mittleren Bewegung ω des Mondknotens (als mittlere Winkelgeschwindigkeit der Knotenlinie von der Länge $\vartheta(t) = \omega t + \psi(t)$, $\omega = \text{konst.} \neq 0$, $|\psi(t)| < \text{Konst.}$, und als Mittelwert der Relativanzahl der Durchgänge der Mondbahn $x(t), y(t), z(t)$ durch die Ekliptik $z = 0$) ein in die Theorie der fastperiodischen Funktionen, insbesondere in den vom Verf. vermuteten, von Bohr bewiesenen Satz: Wenn $\vartheta(t)$ reell und $i\vartheta(t)$ fastperiodisch ist, existiert eine Konstante ω und eine fastperiodische Funktion $\psi(t)$, so daß $\vartheta(t) = \omega t + \psi(t)$ gilt. Außerdem gibt der Verf. analytische Verfeinerungen wie die Existenz einer asymptotischen Verteilungsfunktion für die Winkelvariable $\vartheta(t)$. Die formale Grundlage ist der vom Verf. im Anschluß an frühere Arbeiten gegebene explizite Ausdruck für die transformierte Hamiltonfunktion bei irgendeiner (nicht konservativen) linearen kanonischen Transformation der $2n$ Variablen. Der Fall $n = 1$ gibt für die Adamssche Variationsgleichung $z'' + f(t)z = 0$, $f(t)$ gegebene periodische Funktion, einer gegebenen periodischen Lösung $x(t), y(t)$ des ebenen Problems nach einer durch diese bestimmten linearen kanonischen Transformation $z, z' \rightarrow u, v$ mit periodischen Koeffizienten eine explizit angebbare quadratische Hamiltonfunktion in neuen Variablen u, v , deren Polarwinkel gerade die Knotenlänge $\vartheta(t)$ ist. Auf Grund einer Stabilitätseigenschaft jener periodischen Lösung $x(t), y(t)$ ergibt sich der fastperiodische Charakter von $\exp i\vartheta(t)$ und damit die Voraussetzung für die Anwendung des genannten Bohrschen Satzes.

E. Hölder (Braunschweig).

Elastizität, Akustik:

Locatelli, Piero: Estensione del teorema di Castigliano. Ist. Lombardo, Rend., IV. s. 73, 19—32 (1940).

Es werden die Beziehungen zwischen den Theoremen von Menabrea und Castigliano dargelegt und auf Systeme ausgedehnt, in denen die Beziehungen zwischen den Kräften und Verformungen linear, aber nicht mehr homogen sind, also von der Form $\lambda = \alpha + kS$ (plastisch-elastische Systeme von Colonnetti), und auf solche, in denen diese Beziehungen homogen von beliebigem Grade n sind. In diesem

Falle gilt für die Formänderungsarbeit $A = \frac{1}{1+n} \sum_{i=1}^m Q_i q^i$, und der Satz von Casti-

gliano nimmt die Form an $\frac{\partial A}{\partial Q_i} = \frac{1}{n} q^i$. — Für die Ableitung wird die Symbolik des absoluten Differentialkalküls verwendet. — Als Beispiel wird ein in den Endpunkten A, B gelenkig gelagerter Stab betrachtet, der in einem Zwischenpunkte C mit einer längs AB gerichteten Kraft Q belastet ist, wobei die Beziehung zwischen den Kräften und Verformungen in der Form $\lambda = kS^2$ angesetzt wird. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

Locatelli, P.: Principi della statica delle costruzioni nella dinamica. Ist. Lombardo, Rend., IV. s. 73, 157—167 (1940).

Die Übertragung der Prinzipien der Statik auf das dynamische Gebiet erfordert gewisse Vorsichten. Das Theorem von Castigliano nimmt folgende Form an: Die Ableitung der elastischen Energie nach einer Kraft Q_i (Verf. macht darauf aufmerksam, daß es genauer heißen muß: nach dem Modul — oder Betrag — der Kraft) ist gleich der Komponente der Verschiebung ihres Angriffspunktes in Richtung der Kraft, wenn a) kein endlicher Teil des Systems eine starre Bewegung ausführt oder eine solche, von der eine Komponente die eines starren Körpers ist; b) ein Zeitmoment existiert, in dem das System eine Konfiguration annimmt, die ihm statisch unter der Wirkung der äußeren, eingepprägten Kräfte zukommt; c) die eingepprägten Kräfte von der Zeit unabhängig sind. — Als Beispiel wird ein elastischer Faden AB von konstanter Dichte betrachtet, dessen eines Ende A fest ist und an dessen anderem Ende B eine Kraft Q angreift. Es gilt dann formal wie in der Statik: $\frac{\partial A}{\partial Q} = q$, wobei q die Verschiebung von B ist. — Im letzten Abschnitt wird das Theorem der Reziprozität auf das dynamische Gebiet übertragen. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

Schermann, D. I.: Un plan élastique à coupures rectilignes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 26, 627—630 (1940).

Verf. betrachtet eine elastische Ebene, die in gewissen Teilstücken längs der reellen Achse aufgeschnitten ist. Zur Bestimmung der Spannungen aus den äußeren Kräften bedient er sich funktionentheoretischer Methoden im Anschluß an Keldych und Sédoff (dies. Zbl. 17, 116). *Garten* (Dessau).

Howland, R. C. J., and R. C. Knight: Stress functions for a plate containing groups of circular holes. Philos. Trans. Roy. Soc. London A 238, 357—392 (1939).

Die Spannungsaufgabe für eine unendliche Ebene und einen unendlichen Streifen mit regelmäßig angeordneten kreisförmigen Löchern gleicher Größe wird gelöst mittels Spannungsfunktionen, die invariant sind gegenüber allen Transformationen, bei denen ein Kreisausschnitt in einen anderen übergeführt wird. Die an einem bestimmten Kreisrand erfüllte Bedingung der Spannungsfreiheit überträgt sich dann von selbst auf alle übrigen Kreisränder. Zur Aufstellung solcher biharmonischen Funktion gehen die Verf. aus von komplexen analytischen Funktionen mit bestimmten Singularitäten in den Kreismittelpunkten, wie sie bereits in früheren Arbeiten (vgl. R. C. J. Howland, Zbl. Mech. 1, 253 u. 3, 103 und R. C. Knight, Zbl. Mech. 3, 9) benutzt wurden. Behandelt wird die unendliche Ebene unter Zug und Schub mit zwei gleichen Kreisen, mit vier quadratisch angeordneten Kreisen und mit zwei parallelen, beliebig gegeneinander versetzten unendlichen Kreisreihen, ferner ein Streifen unter Längsbelastung mit ein und zwei symmetrisch zu den Rändern gelegenen Kreispaaaren. Die Arbeit beschränkt sich auf Angabe der umfangreichen Reihenentwicklungen für die Spannungsfunktionen in allgemeiner Form und enthält keine Zahlenbeispiele. *Köller*.

Zanaboni, Osvaldo: Risoluzione, in serie semplice, della lastra rettangolare appoggiata, sottoposta all'azione di un carico concentrato comunque disposto. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 19, 107—124 (1940).

Résolution à l'aide de séries trigonométriques simples du problème de l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses quatre bords et soumise à l'action d'une charge concentrée, appliquée en un point intérieur, problème résolu par Navier moyennant des séries trigonométriques doubles. Il s'agit d'intégrer, sous les conditions aux limites de Navier, l'équation $\Delta^2 w = p(x, y)/N$ où $\Delta^2 = \Delta \Delta$,

Δ = Laplacien, w = déplacement élastique, $N = E\delta^3/12(1 - \nu^2)$, p = charge). On dispose pour l'équation sans second membre de la solution de Maurice Lévy (C. R. Acad. Sci. Paris 129, 535) satisfaisant aux conditions d'appui sur deux bords opposés. L'auteur y ajoute une solution particulière de l'équation complète en divisant la plaque en trois tranches dont celle du milieu est chargée uniformément sur une barre transversale, les deux autres n'étant guère chargées. En faisant ensuite tendre vers zéro la largeur de la tranche centrale, tout en imposant des conditions de continuité et aux limites convenables, on obtient sous une forme maniable la solution d'abord formelle, que l'auteur justifie ensuite en discutant la convergence des séries utilisées. On peut prouver par le calcul l'identité de cette solution avec celle de Navier. La méthode suivie s'applique aussi à d'autres problèmes aux limites de la plaque rectangulaire chargée.

N. Theodorescu (Bukarest).

Hydrodynamik:

Pailloux, Henri: Mouvements fluides entraînant une famille de surfaces inextensibles. Bull. Sci. math., II. s. 63, 329–353 (1939).

Verf. gibt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür an, daß eine Flüssigkeitsbewegung eine unausdehnbare Oberfläche besitzt (z. B. eine Umdrehungsfläche). Er gibt eine Aufstellung von Typen solcher Flüssigkeitsbewegungen und untersucht ihre Eigenschaften.

Garten (Dessau).

Poncet, Henri: Sur les équations du mouvement d'un milieu continu dans le cas de discontinuités stationnaires relatives à la densité. J. Math. pures appl., IX. s. 18, 385–404 (1939).

Auf Grund der hydrodynamischen Gleichungen

$$\begin{aligned}\vec{\text{Div}} \vec{U} &= 0, \\ \vec{\text{Rot}} \vec{U} &= -2\omega(t), \\ \vec{u} \wedge \vec{x}_3 &= 0\end{aligned}$$

bestimmt Verf. die Unstetigkeitsfläche zur Zeit t und studiert die Form der Lösungen der obigen Differentialgleichungen bei der geometrischen Invarianz der Unstetigkeitsfläche. Durch eine einfache Transformation gelingt es Verf., die Lösungsfunktionen ins Komplexe fortzusetzen und dadurch von den Funktionen, die die Unstetigkeitsfläche bestimmen, die Existenz der Ableitungen bis zu einer bestimmten Ordnung nachzuweisen. Verf. zeigt dann, daß seine Untersuchungen in der Theorie der Kavitation Anwendung finden.

Wegner (Heidelberg).

Ferrari, Carlo: Sulla determinazione del proietto di minima resistenza d'onda. I. (Laborat. di Aeronaut., R. Politecn., Torino.) Atti Accad. Soc. Torino 74, 675–693 (1939).

In dem Aufsatz wird bei Überschallgeschwindigkeit die Form geringsten Widerstandes für einen dünnen Rotationskörper bestimmt, von dessen Meridianlinie der Anfangs- und Endpunkt auf der Achse und ein dazwischen liegender Punkt außerhalb der Achse fest vorgegeben sind. Die Aufstellung der Differentialgleichung geschieht im wesentlichen wie bei Kármán (Zbl. Mech. 1, 77 und 5, 175), während die Nebenbedingungen des Minimalproblems natürlich andere sind. Die Lösung läßt sich nach der Methode von Munk-Glauert (durch Einführung Betzscher Grundfunktionen) finden. Von der hierdurch festgelegten Lösung für den Gesamtkörper behauptet der Verf. zum Schluß, daß auch das Vorderteil allein durch ein Minimum des Widerstandes ausgezeichnet sei. Der Beweis hierfür (S. 688) erscheint dem Ref. nicht schlüssig, da eine Veränderung des Vorderteiles allein — beim achsensymmetrischen Fall im Gegensatz zum ebenen Problem — auch Druckveränderungen auf dem Hinterteil zur Folge hat, die bei Verringerung des Gesamtwiderstandes ausgenutzt werden müßten. Damit würde die Behauptung hinfällig, daß das Vorderteil zugleich die Lösung für das Kármánsche Minimalproblem der günstigsten Geschoßspitze sein müßte. Der vom

Verf. behauptete Mangel der Kármánschen Lösung betrifft dagegen eine Ordnung von Gliedern in den Randbedingungen, die in der Differentialgleichung bereits vernachlässigt werden mußte.

A. Busemann (Braunschweig).

Elektrodynamik:

Kondorsky, E.: On hysteresis in ferromagnetics. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 738—742 (1939).

Es wird gezeigt, daß in manchen Fällen, bei denen die Hysteresisschleife rechteckig oder fast-rechteckig ist, ihr Flächeninhalt und der Wert der Koerzitivkraft von der Gestalt des ferromagnetischen Körpers abhängen können. *J. Meixner (Berlin).*

Ferraro, V. C. A.: The induction of currents in infinite plane current-sheets. I. Proc. London Math. Soc., II. s. 46, 99—112 (1940).

Verf. betrachtet elektrische Flächenströme in einer Ebene und gibt allgemeine Formeln an für das magnetische Vektorpotential dieser Ströme. Hierauf betrachtet er die Felddifferentialgleichungen für das magnetische Vektorpotential und für das skalare elektrische Potential und gibt die Grenzbedingungen für diese Größen an. Im Falle eines mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegten Systems gelten die Lorentztransformationen. Durch Einführung neuer Variablen unter Bezugnahme auf diese Transformationen gelangt Verf. zu einer einfachen Lösung der Aufgabe, welche er sich gestellt hat: Die in der Ebene induzierten elektrischen Ströme zu berechnen unter der Einwirkung eines in bezug auf diese Ebene gleichförmig bewegten magnetischen Dipols. Als Spezialfall wird die Lösung für einen Magnetpol angegeben, der senkrecht zur Ebene gelegt wird. Zum Schluß werden eine Reihe von Angaben gemacht für die Fälle, daß eine ungleichförmige Bewegung stattfindet. *M. J. O. Strutt.*

Scheikunoff, S. A.: On diffraction and radiation of electromagnetic waves. Phys. Rev., II. s. 56, 308—316 (1939).

Verf. beruft sich auf einen Eindeutigkeitssatz für die Lösung der Maxwellschen Gleichungen (dessen Beweis kurz angedeutet wird), nach welchem ein Strahlungsfeld in einem Teil des Raumes bestimmt sei, wenn innerhalb desselben die Maxwellschen Gleichungen, im Unendlichen ein bestimmtes Verhalten (z. B. reine Ausstrahlung, zuzüglich gewisser vorgegebener Einstrahlungen) gefordert und auf seiner im Endlichen gelegenen Grenzfläche gewisse elektrische und magnetische Oberflächenströme vorgegeben werden, die sich retardiert in den betrachteten Raumteil hinein auswirken („equivalence theorem“). Er hält es weiter für möglich, daß durch geeignete Wahl dieser Ströme nicht nur in dem einen betrachteten Raumteil das gewünschte Feld (z. B. die von einem bestrahlten Körper herrührende Beugungswelle) bewirkt, sondern auch in dem ausgeschlossenen Raumteil (also etwa im Innern des beugenden Körpers) das dort eingedrungene Feld mitbestimmt werden kann. Sind diese beiden Felder außerdem von einer primären Strahlung erzwungen, so liefert die Grenzbedingung, daß die Differenz der Tangentialkomponenten von eingedrungener und Beugungswelle an der Oberfläche des Körpers gleich der dort herrschenden Tangentialkomponente der bekannten primären Feldstärke sein muß, sogar die erforderlichen Oberflächenströme („induction theorem“). Die Berechnung der Beugungswirkung scheint also auf eine einfache retardierte Integration der Feldwirkung dieser bekannten Ströme hinauszulaufen. Eine nähere Überlegung läßt jedoch erkennen, daß die Sätze des Verf. keineswegs so verstanden werden dürfen. Denn das Ergebnis der Integration hängt, wenn wirklich materiell verschiedene Einlagerungen im Raum vorliegen, ganz davon ab, in welchem Medium, d. h. auf welcher Seite der Grenzfläche die Ströme ganz oder teilweise angenommen werden, und das Problem ist nur auf die Frage dieser Verteilung verschoben. Trotzdem mag in einigen praktischen Fällen — der Verf. deutet solche an — eine naheliegende Annahme über solche Ströme zur brauchbaren Näherungsberechnung eines Feldes führen. *Fues (Breslau).*

Optik:

Westerdijk, T.: Über inhomogene ebene Wellen. Ann. Physik, V. F. 36, 696—736 (1939).

Sehr umständliche Erörterung der Lage der Lichtvektoren \mathcal{E} , \mathcal{H} und \mathcal{S} in der allgemeinen inhomogenen ebenen Welle. Fues (Breslau).

Thomas, C. D., and R. C. Colwell: Wave reflections from diffuse boundaries. Phys. Rev., II. s. 56, 1214—1216 (1939).

Die Verf. untersuchen den Reflexionskoeffizienten einer senkrecht auf die Grenzschicht zweier homogener Isolatoren auffallenden elektromagnetischen Welle, wenn diese Grenzschicht eine endliche Dicke besitzt und die Dielektrizitätskonstante in ihr nach einem Potenzgesetz von ϵ_1 auf ϵ_2 übergeht. Es zeigt sich, daß die Fresnelschen Formeln noch bei beträchtlicher Dicke der Schicht richtig bleiben, wenn der Wert von ϵ sich nirgends weit von 1 entfernt. Dies ist für die Deutung der Reflexion von Radiowellen an höheren Atmosphärenschichten wichtig. Fues (Breslau).

Schouten, J. F.: Diffraction of light by sound film of the variable width type. Physica, Haag 7, 101—121 (1940).

Bei der Aufzeichnung von Schallschwingungen kann man — je nach der hierfür angewandten Methode — Filme erhalten, bei denen die Schwingungen und ihre Form durch verschiedene Dichte, also verschieden starke Lichtdurchlässigkeit wiedergegeben werden, sowie solche Filme, bei denen aus einer undurchlässigen Schicht verschieden breite, der Schwingungsform entsprechende Teile ausgespart sind, so daß diese Filme einen an den verschiedenen Stellen verschieden breiten lichtdurchlässigen Streifen besitzen. Läßt man nun durch derartige Filme (etwa paralleles) Licht hindurchgehen, so ergeben sich auf der anderen Seite Beugungsspektren, die in verhältnismäßig einfacher Weise eine Fourieranalyse des Schalles gestatten. Der Verf. gibt in vorliegender Arbeit die Theorie jener Beugungserscheinungen im Hinblick auf die Fourieranalyse des Schalles, insbesondere bei Benutzung der oben an zweiter Stelle genannten Schallregistrierungen. Picht (Neubabelsberg).

Patterson, A. L.: The diffraction of X-rays by small crystalline particles. Phys. Rev., II. s. 56, 972—977 (1939).

Nach einer kurzen allgemeinen Raunggitterbeugungsrechnung, welche die Abspaltung der Kristallformamplitude erkennen läßt, wird eine Anzahl solcher Amplituden für polyedrische, zylindrische und ellipsoidische Gestalt tabelliert und gezeigt, wie sich die Formamplitude bei einer linearen Verzerrung der Form ändert. Auch die mittlere räumliche Ausdehnung der Formfunktion im reziproken Gitter ist angegeben. Schließlich werden lineare Schnitte durch dieselben in gewissen kristallographischen Vorzugsrichtungen und deren mittlere und Halbwertsbreite angegeben. Die Arbeit ist als erster vorbereitender Teil einer umfassenden Erörterung über die praktische Möglichkeit der Bestimmung von Teilchengröße und -gestalt aus Beugungsaufnahmen gedacht. Fues (Breslau).

Laue, M. v.: Einordnung der Kossel-Möllenstedtschen Elektroneninterferenzen in die Raunggittertheorie. Ann. Physik, V. F. 37, 169—172 (1940).

Durch Erörterung des Kristallformfaktors einer dünnen, quer zum Strahlengang gestellten Kristallplatte gewinnt man eine Beschreibung der von Kossel und Möllenstedt beobachteten „Interferenzfransen“ als Nebenmaxima der Beugungsfigur eines in longitudinaler Richtung sehr wenig ausgedehnten Raunggitters. Diese Beschreibung ist in großen Zügen identisch mit der von Kossel angenommenen Beugung an schmalen Netzebenenspiegeln. Sie hat aber den Vorzug, den Zusammenhang der Interferenzen verschiedener Ordnung besser übersehen zu lassen, und erlaubt ferner die Berücksichtigung des ungleichförmigen Streuvermögens des Spiegels durch einfache Multiplikation mit dem Strukturfaktor. Fues (Breslau).

MacGillavry, C. H.: Zur Prüfung der dynamischen Theorie der Elektronenbeugung am Kristallgitter. Physica, Haag 7, 329—343 (1940).

Relativitätstheorie:

Greinacher, H.: Masse und Energie im Schwerfeld. Helv. phys. Acta 12, 394—396 (1939).

Berechnung der Bewegung eines frei fallenden Körpers nach der speziellen Rela-

tivitätstheorie, einmal mit dem Ansatz konstanter Schwerebeschleunigung, dann mit dem Newtonschen Anziehungsgesetz. *Bechert* (Gießen).

Dantzig, D. van: On the thermo-hydrodynamics of perfectly perfect fluids. I. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 43, 387—402 (1940).

The equations of motion of a perfectly perfect fluid, that is a fluid in which the stress-tensor has the form $\mathfrak{P}^h_i = \mathfrak{D}^h p_i + p A^h_i$ are brought into the form $\partial_j \mathfrak{P}^j_i - \partial_i p = 0$ which equation is independent of metrical geometry. It is shown that these equations can be derived from the variation principle $\delta_L \int p dU = 0$

where δ_L stands for the Lie-variation. The variation of the integral of the pressure over an arbitrary fourdimensional domain U in space-time under a deformation, where certain quantities (\mathfrak{D}^h and the chemical parameters λ^h) are „dragged along“ (in german: „mitgeschleppt“) is equal to δx^4 times the virtual heat of the deformation flowing through the boundary into U . Some other variational relations are derived. Further assumptions about the fluid lead to some one-dimensional variation-principles. *J. Haantjes*.

Fock, V. A.: Sur le mouvement des masses finies d'après la théorie de gravitation Einsteinienne. J. Physics Acad. Sci. USSR 1, 81—116 (1939).

Problemstellung: Nach den Arbeiten von Einstein und Grommer (S.-B. Berl. Akad. 1927, 12) und von Einstein (ebenda 1927, 235) enthalten die Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie auch das Bewegungsgesetz für die Massen, die als singuläre Punkte für die $g_{\mu\nu}$ aufgefaßt werden. Verf. stellt sich die Aufgabe, die $g_{\mu\nu}$ und den Materietensor $T_{\mu\nu}$ wirklich zu bestimmen für eine Massenverteilung, die etwa den Verhältnissen im Sonnensystem entspricht. Die Massen werden dabei nicht als Singularitäten angesehen, sondern als materieerfüllte Gebiete endlicher Ausdehnung. — Im Vorwort eine Kritik der Bestrebungen Einsteins, durch Auffinden von singulären Lösungen eine Theorie atomarer Vorgänge geben zu wollen; Fock sieht seine Überlegungen nur für astronomische Fragen als richtig an. — Am Anfang der Arbeit eine Zusammenstellung von Hilfsformeln: Hinweis auf den Vorteil der Benützung harmonischer Koordinaten, das sind solche, die der Gleichung $\square x_\nu = 0$ genügen; \square ist der auf beliebige $g_{\mu\nu}$ verallgemeinerte Laplacesche Operator. Dann wird der in den Feldgleichungen vorkommende Tensor $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ ($R_{\mu\nu}$ ist der verjüngte Riemannsche Tensor, R sein Skalar) so umgeschrieben, daß die Glieder klar getrennt erscheinen, die für harmonische Koordinaten verschwinden. Nach diesen Vorbereitungen setzt F. die Koordinatenwahl fest: Es werden harmonische Koordinaten benutzt und als unbekannte Funktionen die Größen $\sqrt{-g \cdot g^{\mu\nu}}$. Für alle Himmelskörper gilt, daß der Gravitationsradius $\gamma m/c^2$ (γ = Newtonsche Gravitationskonstante, m = Masse des Körpers) klein gegen den Radius des Körpers ist; und der Radius ist unter normalen Bedingungen klein gegen die gegenseitige Entfernung der Himmelskörper. Die erste Voraussetzung ist für die Rechnungen dieser Arbeit wesentlich, die zweite nicht, dient aber zur Vereinfachung. In großer Entfernung von den Himmelskörpern sollen die $g_{\mu\nu}$ in die Euklidischen Werte übergehen. Unter diesen Voraussetzungen werden die Feldgleichungen bis zur zweiten Näherung einschließlich gelöst. Als erste Näherung ergibt sich das Newtonsche Schwerepotential, aber keine Bewegungsgleichung. Die zweite Näherung liefert als Lösbarkeitsbedingung für die Feldgleichungen die Newtonschen Bewegungsgleichungen für die Massen im Euklidischen Raum, in dem das (in zweiter Näherung berechnete) Schwerepotential der Massen herrscht. Eine Forderung darüber, daß die Teilchen sich auf geodätischen Linien bewegen sollen, wie sie sonst zu den Feldgleichungen hinzugenommen wird, ist für dieses Ergebnis nicht nötig gewesen. Sie ist vielmehr in den Bewegungsgleichungen enthalten, wie man sieht. Bemerkenswert ist das Resultat, daß für die Schwerkraft eines Massensystems in großer Entfernung das Potential in zweiter Näherung lautet: $U = \gamma(m + E/c^2)/r$, wo m die Gesamtmasse ist, E die Summe aus der kinetischen Energie und der potentiellen Energie der gegenseitigen Anziehung der Massen; die Energie wirkt also mit der ihr

entsprechenden Masse bei der Anziehung mit; das entspricht dem Äquivalenzprinzip von schwerer und träger Masse und der Beziehung zwischen träger Masse und Energie. — Schlußbemerkungen; Zusammenhang mit der vor einiger Zeit erschienenen Arbeit von Einstein, Infeld und Hoffmann [Ann. of Math. **39**, 65 (1938)]. *Bechert* (Gießen).

Walker, A. G.: Relativistic mechanics. I. The world-model, and the description of physical objects. Proc. London Math. Soc., II. s. **46**, 113—154 (1940).

The world model considered is a Riemannian 4-space S_4 with metric $ds^2 = dt^2 - t^2 k_{ij} dz^i dz^j = dt^2 - t^2 de^2$ where de^2 is a positive definite metric in a S_3 of constant curvature. One of the properties of this space is that $z^i = \text{constant}$ are the world lines of the fundamental particles. The time t is the kinematical time, the time τ defined by $t = t_0 e^{-1 + \tau/t_0}$ is called the dynamical time. The transformation from one observer to another is of the form $t' = t$; $x^i = f^i(z)$. This transformation involves 6 parameters. It is shown how physical objects may be described by tensors. The objects occurring in classical mechanics are defined and discussed. *J. Haantjes* (Amsterdam).

Atomphysik.

Statistik und kinetische Theorie der Materie:

Kemble, Edwin C.: Fluctuations, thermodynamic equilibrium and entropy. Phys. Rev., II. s. **56**, 1013—1023 (1939).

Schwankungserscheinungen werden im allgemeinen als Ausnahmen vom zweiten Hauptsatz bezeichnet. Dadurch fallen die Voraussagen der Thermodynamik und der statistischen Mechanik nicht exakt zusammen. Verf. schlägt vor, auch die thermodynamischen Gesetze so zu formulieren, daß sie nicht für Einzel-systeme, sondern für Gibbs'sche Gesamtheiten gelten. Die Temperatur eines Systems wird dabei durch den Kontakt mit einem Wärmebad definiert. Der Energieaustausch mit dem Wärmebad führt zu der aus der Gibbs'schen Verteilungsfunktion folgenden statistischen Verteilung der Energien der der Gesamtheit angehörenden Systeme. Verf. führt aus, wie durch diese — dem wirklichen Verfahren des messenden Physikers angemessenen — Definitionen die Übereinstimmung thermodynamischer und statistischer Aussagen erreicht wird. *C. F. v. Weizsäcker* (Berlin-Dahlem).

Kristallbau und fester Körper:

Patterson, A. L.: The Scherrer formula for X-ray particle size determination. Phys. Rev., II. s. **56**, 978—982 (1939).

Die von M. v. Laue, W. L. Bragg, F. W. Jones u. a. entwickelten Näherungsrechnungen zur Bestimmung der Teilchengröße aus der Intensitätsverteilung in Debye-Scherrer-Ringen werden am Beispiel kugelförmiger Teilchen, für welche die exakte Rechnung durchgeführt werden kann, daraufhin geprüft, wie gut sie den Gehalt einer Kristallformamplitude ausschöpfen. Dabei erweist sich die „Berührungsebenenmethode“ v. Laue's als sehr befriedigend. Ferner werden gewisse behelfsmäßig verwendete Formamplituden untersucht, die teils zu stark abweichender Gestaltsbeurteilung führen. Zur ersten Analyse bei unbekannter Teilchengestalt wird ein praktischer Weg vorgeschlagen. *Fues* (Breslau).

Takagi, Mityasu: On a statistical domain theory of ferromagnetic crystals. I. Magnetization and magnetostriction. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. **28**, 20—84 (1939).

Takagi, Mityasu: On a statistical domain theory of ferromagnetic crystals. II. Mutual action of magnetism and mechanical force. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. **28**, 85—127 (1939).

Grundlage der umfangreichen Arbeit ist die Annahme, daß der Volumenanteil, in welchem die Richtung der spontanen Magnetisierung in das Flächenelement $d\omega$ der Einheitskugel weist, proportional zu $e^{-\lambda E} d\omega$ ist. Darin bedeutet E die von der

Magnetisierungsrichtung abhängige freie Energie pro Volumeneinheit und λ einen Proportionalitätsfaktor, der aus der Anfangssuszeptibilität bestimmt wird. Diese Annahme soll ein Ersatz sein für die Behandlung der wirklichen magnetischen Vorgänge, welche bekanntlich wesentlich von den inneren Spannungen abhängen. Von denen ist in der ganzen Arbeit nicht die Rede. E enthält nur die Kristallenergie und den Beitrag des Feldes und der äußeren Spannungen. Ein Beweis für die Grundannahme wird in der Arbeit nicht gegeben. (Da sie in den meisten Fällen nicht erfüllt ist, dürfte ein Beweis wohl unmöglich sein. D. Ref.) Dagegen werden die Folgerungen daraus sehr eingehend behandelt. Die Magnetisierungskurven von kubischen und hexagonalen Einkristallen in verschiedenen Richtungen, die Normalkomponente der Magnetostriktion, das Gesetz für die Einmündung in die Sättigung sowie der Verlauf der Magnetostriktion werden ermittelt. Die dazu erforderlichen Besselschen Funktionen $J_n(x)$ für einige ganzzahlige x und n bis zur Größe 100, welche noch nicht in Tabellen vorliegen, werden berechnet. Im zweiten Teil wird der Verlauf der Magnetisierungskurve und der Magnetostraktion von Einkristallen unter Zug sowie der ΔE -Effekt behandelt. Die Ergebnisse werden mit den Experimenten verglichen. In dem Gebiet, wo die ältere Drehvorstellung gute Übereinstimmung gab, ergibt diese Theorie nahezu dasselbe. Im Anfangsteil der Magnetisierungskurve (Gebiet der Wandverschiebungen), wo die bisherige Theorie keine prüfbaren Aussagen lieferte, wird diese Theorie teils bestätigt, teils ergeben sich grobe Diskrepanzen. Z. B. sollte danach die Suszeptibilität monoton mit dem Felde absinken. Die Arbeit überschneidet sich zum großen Teil mit Rechnungen von Brown unter ähnlichen Annahmen. Bestechend an der Arbeit ist, daß aus dem einen Grundpostulat heraus alle Magnetisierungsvorgänge behandelt werden. Ihre Schwäche liegt in der Fehlerhaftigkeit eben dieses Postulates. *W. Döring.*

Frenkel, J.: On the temperature dependence of plastic deformation and creep. J. Physics, Moscow 2, 49—54 (1940).

Es wird eine Theorie der plastischen Deformation vorgeschlagen, die von der Annahme ausgeht, daß die Elastizitätsgrenze eines idealen Kristallgitters exakt gleich Null ist. Anschließend wird eine Relaxationstheorie der Gleitung und ihrer Temperaturabhängigkeit entwickelt. *J. Meixner (Berlin).*

Elektronentheorie:

● **Strutt, M. J. O.: Moderne Mehrgitter-Elektronenröhren. Bau. Arbeitsweise. Eigenschaften. Elektrophysikalische Grundlagen. 2., verm. u. verb. Aufl. Berlin: Julius Springer 1940. VIII, 283 S. u. 242 Abb. RM. 24.—.**

Rogowski, W.: Rückwirkung durch metastabile Atome und Durchschlagssenkung bei Edelgasen. Z. Physik 115, 257—295 (1940)

Verf. untersucht den Einfluß der metastabilen Atome auf das Verhalten von Funkenstrecken. Diese Atome werden durch Elektronenstoß erzeugt und wandern dann durch Diffusion von ihrer Entstehungsstelle ab. Die Berechnung der Diffusion und der Verteilung der metastabilen Atome im Beharrungszustand führt auf mathematische Formulierungen, die grundsätzlich denen sonstiger Diffusionsprobleme ähnlich sind. Ein Teil der metastabilen Atome geht zur Kathode und löst dort neue Elektronen aus (metastabile Oberflächenrückwirkung). Ebenso werden beim Stoß zweier solchen Atome neue Elektronen frei (räumliche Rückwirkung). Das Wachstum der von ihnen ausgehenden Elektronenlawinen wird nach dem alten Townsendschen Ansatz $\frac{dn}{dx} = \alpha n$ berechnet. Verf. ermittelt ferner die sich daraus ergebende Durchschlagssenkung. Der Hauptteil der Arbeit ist den physikalischen Folgerungen aus diesen Rechnungen gewidmet. *Henneberg (Berlin).*

Weizel, W., R. Rompe und M. Schön: Zur Theorie der kathodischen Entladungsteile eines Lichtbogens. Z. Physik 115, 179—201 (1940).

Unter der Annahme, daß die Bogenkathode keine Elektronen emittiert, ergibt sich,

daß man im Kathodengebiet drei Bereiche unterscheiden muß: 1. ein Raumladungsgebiet an der Kathode, in dem die Elektronen vernachlässigt werden dürfen, 2. ein Ionisationsgebiet, das nach der Kathode hin den Strom als Ionenstrom, nach dem Bogen hin als Elektronenstrom abgibt, 3. ein Wärmeleitungsgebiet, das sich an die Säule anschließt, in dem der Strom fast ausschließlich von Elektronen getragen wird. *J. Meixner (Berlin).*

Piekara, A.: A theory of electric polarization, electro-optical Kerr effect and electric saturation in liquids and solutions. *Proc. roy. Soc., Lond. A* **172**, 360—383 (1939).

Neben den Kräften, die auf ein Molekül mit elektrischem Dipolmoment von den benachbarten mehr oder minder regelmäßig angeordneten Molekülen her einwirken, werden die Kräfte berücksichtigt, die auftreten, wenn ein benachbartes Molekül an das betrachtete zufällig nahe herankommt, wie das im flüssigen Zustand der Fall sein kann. *J. Meixner (Berlin).*

Nicht-relativistische Quantentheorie:

Schrödinger, E.: A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proc. roy. Irish Acad. A* **46**, 9—16 (1940).

Die Methode besteht darin, den linearen Differentialoperator zweiter Ordnung, der in den Differentialgleichungen der Wellenmechanik vorkommt, in zwei gegenseitig adjungierte Differentialoperatoren erster Ordnung zu zerlegen, welche die Eigenschaft haben, bei der Anwendung auf eine Eigenfunktion die „nächste“ Eigenfunktion zu erzeugen. Es läßt sich zeigen, daß die Methode vollständig ist in der Weise, daß sie alle Eigenfunktionen gibt. Anwendung auf die Fälle: linearer Oszillator, Wasserstoffatom (nicht-relativistisch), Kugelfunktionen der dreidimensionalen Hyperkugel, Wasserstoffatom in einem Weltall konstanter Krümmung. Das letztgenannte Problem hat als Eigenwerte einfach die Überlagerung der Eigenwerte des Wasserstoffatoms und der Eigenwerte der Eigenschwingungen eines Weltalls konstanter Krümmung; ein eigentlich kontinuierliches Spektrum tritt dabei nicht auf, wenn auch die Eigenwerte der Weltallschwingungen natürlich außerordentlich dicht liegen. *Bechert.*

Casimir, H. B. G.: The ortho-para conversion of deuterium and the electric quadrupole moment of the deuteron. *Physica, Haag* **7**, 169—176 (1940).

Ein Quadrupolmoment des Deuterons führt zu einer zusätzlichen Umwandlungswahrscheinlichkeit für die Ortho-Para-Umwandlung des Deuteriums, wenn ein inhomogenes Feld (benachbarter Molekeln) vorhanden ist. Die Abschätzung zeigt größenordnungsmäßig den Einfluß eines Quadrupolmomentes vom Betrag des von Rabi gemessenen. *F. Hund (Leipzig).*

Bernard, E., C. Manneback et A. Verleysen: Fonction potentielle des mouvements plans de la molécule de benzène. Calcul des fréquences normales planes de vibration des molécules sym- $C_6H_3D_3$, para- $C_6H_4D_2$ et para- $C_6H_2D_4$. II. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I*, **60**, 45—59 (1940).

Ein früher (dies. Zbl. **22**, 284) auf Grund empirischer Daten der C_6H_6 - und C_6D_6 -Molekeln aufgestellter Ausdruck der potentiellen Energie erweist sich als ausreichend für die Berechnung der Frequenzen der ebenen Schwingungen der Molekeln sym- $C_6H_3D_3$, para- $C_6H_4D_2$ und para- $C_6H_2D_4$ in guter Übereinstimmung mit den Messungen. *F. Hund (Leipzig).*

Yamanouchi, Takahiko, and Masao Kotani: Excitation of atoms by electron collision. *Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s.* **22**, 14—33 (1940).

Verff. untersuchen für die metastabilen Atom- oder Molekülzustände, die für die Deutung der Nebel- und Nordlichtlinien herangezogen werden, die Entstehungsmöglichkeit auf Grund von Elektronenstößen. Sie arbeiten das Verfahren zur Berechnung der Anregungswahrscheinlichkeit eines Atoms allgemein aus und wenden es auf Atome in p^n -Konfigurationen an. Die Wahrscheinlichkeit wird auf zwei Weisen gefunden: Der einfachere Weg besteht darin, die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den beiden Quantenzuständen auszuwerten, wobei der Aufwand für die Berechnung von Matricelementen durch gruppentheoretische Betrachtungen erheblich vermindert wird.

Bei dem anderen, sonst üblichen Verfahren wird eine Näherungslösung des stationären Zustandes des Systems (Atom + freies Elektron) aufgesucht; es hat den Vorzug, daß man hier z. B. leicht die Nichtorthogonalität der Wellenfunktion berücksichtigen kann. Die Endergebnisse beider Berechnungsweisen stimmen in der erreichten Näherung überein; Zahlenergebnisse für das Sauerstoffatom und -ion sollen später veröffentlicht werden. — Die entwickelte Theorie liefert auch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die metastabilen Zustände durch Elektronenstoß zerstört werden. Für das stoßende Elektron stellt sie die Theorie der Austauschstreue dar. *Henneberg.*

Yamanouchi, Takahiko: Production of metastable states of atom by photo-ionization and recombination. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 22, 33—41 (1940).

Im Anschluß an die vorstehend referierte Arbeit vom Verf. und Kotani untersucht Verf. hier die Entstehung metastabiler Atomzustände durch einen Photoeffekt, bei dem das Atom im Grundzustand in Anwesenheit eines Strahlungsfeldes zunächst lichtelektrisch ionisiert wird und das entstehende Ion auf demselben Wege ein Elektron wieder einfängt, so daß es sich im metastabilen Zustand befindet. Dazu sind die Übergangswahrscheinlichkeiten von Dipolstrahlung zu ermitteln, was im vorliegenden Fall deshalb nicht schwierig ist, weil man nur den Zustand des Ions zu kennen wünscht, nicht aber den des emittierten oder wieder eingefangenen Elektrons. Die Wahrscheinlichkeit wird für ein Atom mit äquivalenten Elektronen berechnet und für p^n -Konfigurationen explizit angegeben. Auch hier sollen numerische Ergebnisse für Sauerstoffatom und -ion später veröffentlicht werden. *Henneberg (Berlin).*

Serpe, J.: Sur le problème de la largeur naturelle et du déplacement des raies spectrales. Physica, Haag 7, 133—144 (1940).

Bei der Berechnung der natürlichen Linienbreite auf Grund der Diracschen Strahlungstheorie tritt insofern eine Schwierigkeit auf, als sich bei bestimmter Art der Rechnung eine Verschiebung der Linien ergibt. Benutzt man jedoch die von Kramers (vgl. dies. Zbl. 18, 44) gegebene Abänderung, die an die Korrespondenz zur klassischen Elektronentheorie anknüpft, so tritt die Schwierigkeit nicht auf. *F. Hund (Leipzig).*

● **Hand- und Jahrbuch der chemischen Physik.** Hrsg. v. A. Eucken u. K. L. Wolf. Bd. 10, Abschnitt 3. — Mrowka, B.: Starkeffekt. — Stuart, H. A.: Elektrischer Kerr-Effekt (elektrische Doppelbrechung). Leipzig: Akad. Verlagsges. m. b. H. 1939. 104 S. u. 31 Fig. RM. 12.—

Im Artikel von Mrowka werden zunächst ohne viel Rechnung die Grundlinien des Stark-effekts wasserstoffähnlicher Atome gegeben: Das Scheitern klassischer Vorstellungen, die erfolgreichen Überlegungen der älteren und neueren Quantentheorie. Die lineare Aufspaltung der Terme und Linien, Intensitäts- und Polarisationsgesetze für die letzteren, die unsymmetrische Mitwirkung quadratischer und die höherer Glieder bei starken Feldern, das Aussterben von Linien bei höchsten Feldstärken werden durch Beobachtungen belegt und theoretisch gedeutet. Die Effekte bei Helium und höheren Atomen schließen sich an, unsere spärlichen Kenntnisse des Stark-effekts an Molekülen sind kurz erwähnt. Eine knappe Schilderung des Zusammenhanges von Stark-effekt mit Druckverschiebung und -verbreiterung von Spektrallinien und mit den Formeln der Dispersionstheorie rundet das Referat ab. — Der Bericht von Stuart bespricht, nach kurzer einleitender Begriffsbildung und Würdigung des Kerreffekts als Hilfsmittel zur Untersuchung von Molekülstruktur und des Ordnungszustandes in Flüssigkeiten, sowohl die ältere Voigtsche Deutung als eine vom Vorfeld induzierte Anisotropie des Moleküls als auch die auf Langevin und Born zurückgehende Orientierungstheorie, welche den Effekt nur als Ausrichtung der von vornherein anisotropen Einzelmoleküle durch das Feld versteht. In beiden Fällen wird durch klassische Überlegungen die Doppelbrechung berechnet, wobei bekanntlich der Orientierungseinfluß als praktisch sehr viel bedeutungsvoller erkannt wird. Er unterscheidet sich nach Größe und Temperaturabhängigkeit bei Molekülen ohne und mit permanentem elektrischem Moment. Die Untersuchungsmethoden des Effekts bei Flüssigkeiten, Gasen und Dämpfen sind kurz dargestellt, die Meßergebnisse in längeren Tabellen aufgeführt; dagegen ist auf eine Schilderung der technischen und apparativen Ausnutzung des Effekts verzichtet. Die Erfahrungen über Temperaturabhängigkeit, Dispersion, absolute Größe und Trägheit des Effekts sind sodann mit den theoretischen Vorstellungen verglichen und der Zusammenhang von Kerreffekt mit der Depolarisation molekular gestreuten Lichts erörtert. Eine Betrachtung der Dichteabhängigkeit und des beträchtlichen dabei hervortretenden Einflusses der Anordnung der Flüssigkeitsmoleküle, für die aber eine be-

friedigende theoretische Behandlung noch fehlt, beschließt den ersten Teil des Artikels. — In einem zweiten Teil geht der Verf. näher auf die Möglichkeit ein, aus Messungen des Kerr-Effekts an Dämpfen auf Molekülstrukturen zu schließen. Zunächst wird gezeigt, wie sich das Polarisierbarkeitsellipsoid eines Moleküls aus Messungen von Kerrkonstante, Molekularrefraktion und Depolarisationsgrad bestimmen läßt (handelt es sich um ein Rotationsellipsoid, so genügen zwei dieser Größen); auch über solche Bestimmungen werden Tabellen mitgeteilt. Dann wird mit Hilfe der Silbersteinschen Theorie der Zusammenhang dieses Ellipsoids mit dem stereometrischen Bau des Moleküls hergestellt. Und schließlich werden durch derartige Betrachtungen die Strukturen einer Reihe von anorganischen und organischen Molekülen näher bestimmt.

Fues (Breslau).

Neugebauer, Th.: Theorie des Plotnikow-Effektes. Physik. Z. **41**, 55—62 (1940).

Ein ultrarotes Lichtbündel wird beim Durchgang durch manche hochmolekulare Substanzen mit Kettenmolekülen in einen mehr oder weniger scharfen Lichtkegel von meist geringer Öffnung (einige Grad Öffnungswinkel) zerstreut, gelegentlich aber auch zur sogenannten Streureflexion bis zur Rückkehr umgebogen. Der Verf. erörtert, daß und warum es sich nicht um molekulare Streuung handeln kann. Dagegen nimmt er an, daß eine Totalreflexion an den Grenzflächen der stark anisotropen Molekülbündel zugrunde liegt, für welche sich der bei Einfachreflexion zu erwartende Öffnungswinkel des Lichtkegels aus der Anisotropie der Moleküle abschätzen läßt. Die letztere folgt größenordnungsmäßig aus der quantenmechanischen Dispersionsformel, wenn bekannte Dipolmomente und Frequenzen der Deformationsschwingungen der Kettenmoleküle eingesetzt werden. Der berechnete Öffnungswinkel stimmt mit beobachteten Größenordnungen überein, auch scheinen eine Reihe weiterer Einzelheiten qualitativ für die Grundvorstellung des Verf. zu sprechen.

Fues (Breslau).

Kemble, Edwin C.: The quantum-mechanical basis of statistical mechanics. Phys. Rev., II. s. **56**, 1146—1164 (1939).

Die in einer vorangehenden Arbeit [Phys. Rev. **56**, 1013 (1939); dies. Zbl. **23**, 84] qualitativ ausgeführten Anschauungen wurden hier quantenmechanisch begründet. Die Entropiedefinition von J. v. Neumann wird kritisiert, und es wird gezeigt, daß nach der Definition des Verf. bei der Vereinigung zweier vorher isolierter Systeme die Entropie gleichbleibt oder anwächst.

C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

Blokhintzev, D. I.: The Gibbs quantum ensemble and its connection with the classical ensemble. J. Physics, Moscow **2**, 71—74 (1940).

Verf. untersucht den Grenzübergang vom quantentheoretischen zum klassischen Gibbsschen Ensemble und stellt die Bedingung für die Unterscheidbarkeit der Teilchen auf.

C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

Wooldridge, D. E.: Theory of secondary emission. Phys. Rev., II. s. **56**, 562—578 (1939).

Verf. untersucht auf quantenmechanischem Wege die Sekundärelektronenemission (SE.) von Metallen infolge der Wechselwirkung der Primärelektronen mit den Valenzelektronen; die Darstellung von Fröhlich [Ann. Physik (5) **13**, 229 (1932)] wird dabei in wesentlichen Punkten verfeinert. Wie schon Fröhlich bemerkte, können selbst in erster Näherung die Metallelektronen nicht als frei angesehen werden, da sonst infolge des Impulserhaltungssatzes die SE. nach der Seite der einfallenden Primärelektronen hin nicht erklärt werden könnte. Wellenmechanisch wird nun die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, daß der Anfangszustand („freies“ Primärelektron im Kristallgitter + Valenzelektron in einem im Kristallgitter erlaubten Zustand) in irgendwelche Endzustände übergeht, von denen einige zur SE. führen können. Während Primär- und Metallelektron als unterscheidbare Teilchen behandelt werden, wird dann das Pauliprinzip doppelt berücksichtigt, bei der Summierung der so berechneten Wahrscheinlichkeiten über alle möglichen Valenzelektronen unter Anwendung der Fermistatistik und bei der Streichung aller Übergänge, in denen Elektronen bereits besetzte Zustände einnehmen würden. Wenngleich sich auf diese Weise eine gewisse Abhängigkeit der SE. von der Primärelektronenenergie E_p ergibt, so stimmt sie doch keineswegs mit den Beobachtungen überein. Hierzu muß man noch die folgenden

plausiblen Annahmen machen: Die einfallenden Primärelektronen verlieren durch Sekundärelektronenauslösung so lange Energie, bis diese unter den dazu erforderlichen Minimalwert gesunken ist; dies geschieht innerhalb eines Abstandes von der Oberfläche, der kleiner ist als die freie Weglänge der ausgelösten Sekundärelektronen. Außerdem können natürlich nur die Sekundärelektronen mit einer gewissen Mindestenergie das Metall verlassen und zur SE. beitragen. Zur Anpassung der berechneten Werte des SE.-Faktors δ an die Beobachtungen dient als einziger Parameter der Maximalwert von δ . Für zahlreiche Metalle ergibt sich eine überraschend gute Übereinstimmung der berechneten und beobachteten δ - E_p -Kurven, besonders hinsichtlich der zu δ_{\max} gehörigen Energie E_p . Verf. erörtert die Abhängigkeit der SE. von der Kristallgitterkonstanten und der Austrittsarbeit, auf Grund deren sich die niedrige SE. von reinen Alkalien und die hohe SE. von zusammengesetzten Alkalischichten qualitativ erklären lassen.

Henneberg (Berlin).

Wheeler, Mary A.: The paramagnetic susceptibility of copper-nickel and zinc-nickel alloys. Phys. Rev., II. s. 56, 1137—1145 (1939).

Die gemessenen Suszeptibilitäten (Abhängigkeit von der Temperatur und der Zusammensetzung der Legierungen) werden vom Standpunkt der Heisenbergschen und der Blochschen Theorie des Ferromagnetismus aus diskutiert.

J. Meixner.

Relativistische Quantentheorie:

Born, Max: Reciprocity and the number 137. I. Proc. roy. Soc. Edinburgh 59, 219—223 (1939).

Se référant à des idées de Landé [Phys. Rev. 56, 482 et 486 (1939)], l'auteur décrit la fonction d'onde d'une particule $\psi(\vec{x}, t)$ dans l'espace \vec{x} à partir d'une somme de Fourier sur des ondes planes, dont la fréquence circulaire ν est reliée au vecteur d'onde \vec{k} par la relation $\nu^2 = \varepsilon^2 + k^2$, $2\pi/\varepsilon$ correspondant à la longueur d'onde de Compton des particules associées au champ. Réciproquement, il introduit une fonction d'onde φ dans l'espace \vec{k} construite d'une façon analogue à partir des ondes planes dans cet espace réciproque, dont la „fréquence“ t et le „vecteur d'onde“ \vec{x} sont reliés par $t^2 = \tau^2 + x^2$. τ est ainsi une longueur fondamentale dans l'espace \vec{x} . Il demande ensuite que le coefficient de Fourier du développement de φ soit égal à $\psi(\vec{x}, \sqrt{\tau^2 + x^2})$. Ce postulat, dont la signification physique reste à discuter, s'exprime sous forme d'une équation intégrale fournissant des valeurs propres pour le nombre pur $\varepsilon\tau$. Un deuxième nombre pur est obtenu en calculant le self-potential Newtonien de la densité $|\psi|^2$, normalisé à l'unité, en termes de $1/\tau$. L'auteur s'attend à ce que le rapport entre $\varepsilon\tau$ et ce second nombre soit de l'ordre de grandeur de $1/137$, ce qui signifiera que la masse de repos d'un électron est égale à sa self-énergie électrostatique.

Stueckelberg (Genf).

Belinfante, F. J.: On the covariant derivative of tensor-unders. Physica, Haag 7, 305—324 (1940).

In jedem Punkt der Riemannschen Welt werde ein orthogonales Vierbein, bestehend aus 4 Einheitsvektoren h_k mit Komponenten h_k^μ , willkürlich gewählt. Nun können die Matrizen β und γ^k , die das Bindeglied zwischen „Undoren 1. Ranges“ (= vierkomponentigen Spinoren) ψ und Welttensoren bilden, so gewählt werden, daß ihre Vierbeinkomponenten numerisch konstant sind. Ihre Bedeutung ist, daß

$$\psi_k^* \beta^{kl} \psi_l (= \psi^\dagger \beta \psi \text{ in Matrixschreibweise})$$

ein reeller Skalar und

$$j^k = i \psi_k^* \beta^{kl} (\gamma^k)_l^m \psi_m (= i \psi^\dagger \beta \gamma^k \psi)$$

ein reeller Viervektor ist; sie haben weiter die bekannten Eigenschaften

$$\beta^\dagger = \beta; \quad \gamma^k \gamma^l + \gamma^l \gamma^k = 2g^{kl}; \quad (\beta \gamma^k)^\dagger = -\beta \gamma^k.$$

Die numerische Konstanz von β und γ^k ist invariant bei Koordinatentransformationen

und bei Änderungen der Vierbeine, vorausgesetzt, daß im letzten Fall die Undor-komponenten entsprechend mittransformiert werden. — Die kovariante Parallelverschiebung einer beliebigen Größe q (gleichgültig ob Tensor, Undor oder wie auch gemischt) kann nun so definiert werden: Man verschiebe ein orthogonales Vierbein mittels der gewöhnlichen (durch die $g_{\mu\nu}$ definierten) Übertragung; dann wird die Größe q so mitgenommen, daß ihre Komponenten in bezug auf dieses Vierbein konstant bleiben. Die kovariante Differentiation $V_\mu q$ kann wie üblich mittels der kovarianten Übertragung definiert werden; wie immer kann $V_\mu q$ als Summe aus der gewöhnlichen Ableitung $\partial_\mu q$ und gewissen, in den q -Komponenten linearen Zusatzgliedern dargestellt werden. Die kovarianten Ableitungen von β und γ_μ sowie des „Ladungskonjugators“ L , der durch

$$L\gamma^k = \gamma^k L, \quad LL^* = 1, \quad (\beta L)^* = -(\beta L)^\dagger$$

definiert wird, sind Null. In einem Anhang wird ausgeführt, daß die Rechnungen (unnötigerweise) viel komplizierter werden, wenn die Forderung der numerischen Konstanz von β und γ^k fallen gelassen wird. *v. d. Waerden (Leipzig).*

Yamamoto, Hideo: On the gravitational perturbation for the Dirac electron. Mem. Coll. Sci. Kyoto A 22, 225—235 (1939).

The author studies a quantum problem by means of his generalized wave equation in the tensor forms

$$J^{\sigma\kappa}_{\cdot\lambda\nu} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla_\sigma + \frac{e}{c} \varphi_\sigma \right) \psi^{\lambda\nu} + m c \dot{\psi}^\kappa = 0,$$

$$J^{\sigma\lambda\nu}_{\cdot\kappa} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla_\sigma + \frac{e}{c} \varphi_\sigma \right) \psi^\kappa + m c \psi^{\lambda\nu} = 0.$$

where

$$J_{\sigma\kappa\lambda\nu} = \frac{1}{2} (g_{\sigma\kappa} g_{\lambda\nu} + g_{\sigma\lambda} g_{\kappa\nu} - g_{\sigma\nu} g_{\kappa\lambda} + \sqrt{-1} i_{\sigma\kappa\lambda\nu}).$$

The method used is similar to that used in the perturbation theory for $g_{\lambda\kappa} = -1, -1, -1, +1$. *J. Haantjes (Amsterdam).*

Bibén, Georges: De l'intégration de l'équation de M. de Donder. Détermination de l'onde monochromatique. C. R. Acad. Sci., Paris 209, 726—728 (1939).

Verf. betrachtet die Lösung der Wellengleichung $\square \psi - \left(\frac{2i\pi}{h} \right)^2 m_0^2 c^2 \psi = 0$,

welche von De Donder stammt. Es wird angesetzt $\psi = e^{\frac{2i\pi}{h} Et} \varphi(x^1, x^2, x^3)$. Die Gleichung wird integriert für den Fall eines Schwarzschildschen Linienelementes, wobei φ als eine Funktion von r angesetzt wird. *J. Haantjes (Amsterdam).*

Steubing, W., und A. Keil: Die Feinstruktur des Stark-Effekts an $H\beta$. Z. Physik 115, 150—178 (1940).

Der Starkeffekt an der $H\beta$ -Linie des Wasserstoffs wird unter Berücksichtigung der Feinstruktur nach der Diracschen Theorie berechnet. Für Feldstärken von 10^4 bis 10^5 kV/cm ergeben sich Unsymmetrien im Aufspaltungsbild, die von der Feinstruktur herrühren. Sie werden in einer experimentellen Untersuchung quantitativ bestätigt. *J. Meixner (Berlin).*

Wataghin, Gleb: On explosion showers. Phys. Rev., II. s. 56, 1245 (1939).

Durch eine geeignete einfache Schematisierung der Wechselwirkung und Quantelung des Materiefeldes ergeben sich für Explosionsschauer bei Zusammenstoß sehr energiereicher Teilchen ähnliche Beziehungen, wie sie Heisenberg (dies. Zbl. 21, 371) fand. *F. Hund (Leipzig).*

Gentile, Giovanni: Sulle equazioni d'onda relativistiche di Dirac per particelle con momento intrinseco qualsiasi. Nuovo Cimento, N. s. 17, 5—12 (1940).

Après un exposé très condensé de la théorie de Dirac [Proc. Roy. Soc. London A 155, 477 (1936)] au sujet de particules à spin quelconque (entier ou demi-entier) et qui s'exprimait sous forme d'équations spinorielles, l'auteur déduit les mêmes équations d'un opérateur invariant, qui a été formé à partir de la théorie de l'électron de Dirac. Ensuite, l'auteur discute les équations du mésotron de spin 1 sous forme spinorielle. *Stueckelberg (Genf).*

Pauli, W., and F. J. Belinfante: On the statistical behaviour of known and unknown elementary particles. *Physica*, Haag 7, 177—192 (1940).

Die Gültigkeit des Satzes: „Elementarteilchen ohne Spin haben Bosestatistik, Elementarteilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ haben Fermistatistik“, die Belinfante (dies. Zbl. 22, 47) aus einer in bestimmter Weise gefaßten Ladungsinvarianz des Geschehens und Pauli (Solvay-Kongreß 1939) aus der Vertauschbarkeit der Feldgrößen an verschiedenen Raum-Zeit-Punkten mit raumartiger Verbindungslinie und aus dem positiven Charakter der Energie geschlossen hatten, wird hier für allgemeinere Fälle untersucht. Wenn die Materie durch mehrere Skalare oder Undoren beschrieben wird, reicht die Ladungsinvarianz nicht aus. Jedoch folgt auch dann bei Spin 0 aus der genannten Vertauschungseigenschaft die Bosestatistik, bei Spin $\frac{1}{2}$ aus dem positiven Charakter der Energie die Fermistatistik.

F. Hund (Leipzig).

Solomon, Jacques: Mésotrons neutres et paires d'électrons. *C. R. Acad. Sci.*, Paris 209, 678—680 (1939).

Certaines formes des équations du champ nucléaire (champ des mésotrons) donnent lieu à des termes d'énergie correspondants à une interaction directe entre les particules nucléaires (neutrons et protons). [Cette interaction directe peut être caractérisée par une énergie potentielle $\delta(\vec{r})$ où δ est la fonction δ de Dirac (trois-dimensionnelle) et \vec{r} le vecteur de la distance entre deux particules]. L'auteur suppose que le champ nucléaire agisse non seulement sur les protons et les neutrons, mais aussi sur les électrons. À ce moment, les termes d'interaction directe correspondent naturellement aux termes de la théorie de Gamow et Teller [*Phys. Rev.* 51, 289 (1937)]. Cette correspondance peut être rendue parfaite si le champ nucléaire possède des composantes vectorielles et pseudoscalaires. En utilisant les déductions de Bethe et Marshak [*Phys. Rev.* 53, 677 (1938)] au sujet de la théorie de Gamow et Teller, l'auteur discute la stabilité du mésotron neutre.

Stueckelberg (Genf).

Fermi, Enrico: The absorption of mesotrons in air and in condensed materials. *Phys. Rev.*, II. s. 56, 1242 (1939).

Empirisch werden Mesonen in Luft stärker absorbiert als in gleichen Mengen kondensierter Materie. Man schließt daraus auf den Zerfall des Mesons. Fermi weist auf einen anderen dichteabhängigen Effekt hin: in kondensierter Substanz vermindert die elektrische Polarisierbarkeit der Materie die Energieübertragung. Die Größenordnung des theoretisch zu erwartenden Effekts ist mit der Erfahrung vereinbar. (Inzwischen wurde aber durch Williams der Zerfall des Mesons direkt beobachtet.)

C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

Thaxton, H. M., and L. E. Hoisington: Phase shift calculations for proton-proton scattering at high energies. *Phys. Rev.*, II. s. 56, 1194—1198 (1939).

Furry, W. H.: On transition probabilities in double beta-disintegration. *Phys. Rev.*, II. s. 56, 1184—1193 (1939).

Nach der Majoranaschen Modifikation der Neutrinotheorie (ohne Antineutrino) sind Doppel- β -Zerfälle ohne Neutrinoemission möglich, deren Wahrscheinlichkeit hier berechnet wird. Nach dem Ansatz von Konopinski und Uhlenbeck könnten sie die Isotopenhäufigkeiten merklich beeinflussen, nach dem Ansatz von Fermi nur bei einer Massendifferenz von etwa $10 \cdot 10^{-3}$ ME.

C. F. v. Weizsäcker.

Frenkel, J., and V. Cherdynceev: On the gaseous model of atomic nuclei. *J. Physics*, Moscow 2, 55—64 (1940).

Die Verff. stellen auf Grund des Vergleichs eines Korns mit einem Gas Formeln für seine Bindungsenergie auf, ähnlich wie man es im Tröpfchenmodell zu tun pflegt, und schätzen die Isotopenhäufigkeit, die Variation der elektrischen Dichte im Kern, die Auflockerung der Kerne durch Coulombkräfte und Anregung und die Zahl der α -Teilchen im Kern ab.

C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

Oppenheimer, J. R., and J. S. Schwinger: On pair emission in the proton bombardment of fluorine. *Phys. Rev.*, II. s. **56**, 1066—1067 (1939).

Beim Prozeß $F^{19} + H^1 \rightarrow Ne^{20*} \rightarrow O^{16} + He^4$ entstehen γ -Quanten und Paare bei bestimmten, aber verschiedenen Resonanzenergien. Die Schärfe der γ -Resonanzen führte zu der Vermutung, daß der Zwischenkern wegen eines Auswahlverbots keine langreichweitigen α -Strahlen emittieren kann. Diese Vermutung muß entweder falsch sein, oder eine direkte, durch die Kernkräfte vermittelte Kopplung zwischen leichten und schweren Teilchen muß zur Paaremission führen. *C. F. v. Weizsäcker.*

Bohr, Niels, and John A. Wheeler: The fission of protactinium. *Phys. Rev.*, II. s. **56**, 1065—1066 (1939).

Die Entdeckung von v. Grosse, Booth und Dunning [*Phys. Rev.* **56**, 382 (1939)], daß Protaktinium durch Neutronen unter 2 MeV, aber nicht durch thermische Neutronen gespalten werden kann, fügt sich in den Rahmen der von den Verff. gegebenen Theorie gut ein. Ein Fehler der ursprünglichen Arbeit [*Phys. Rev.* **56**, 426 (1939)] wird berichtigt. *C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).*

Ehmert, A.: Über die harte Komponente der kosmischen Strahlung in der Stratosphäre. *Z. Physik* **115**, 326—332 (1940).

Astrophysik.

Tolman, Richard C.: On the stability of spheres of simple mechanical fluid held together by Newtonian gravitation. *Astrophys. J.* **90**, 541—567 (1939).

Die Bedingungen für ein Minimum der totalen potentiellen Energie einer aus einer einfachen mechanischen Flüssigkeit aufgebauten Kugel, in der der Druck p sich als Funktion der Dichte ρ allein darstellen läßt, werden untersucht. Die klassischen Regeln der Variationsrechnung werden also angewandt auf das Integral

$$U = \int_0^{r_b} \left(u m' - \frac{m m'}{r} \right) dr,$$

wo U die gesamte pot. Energie der Kugel bedeutet, u die mechanische pot. Energie pro Masseneinheit, $-m/r$ die pot. Gravitationsenergie pro Masseneinheit, m die Masse innerhalb des Radius r , $m' = dm/dr$, r_b den äußeren Kugelradius. Die Bedingungen für ein Minimum von U bei Variationen von $m(r)$ sind trivial außer der Jacobischen. Z. B. im Spezialfall der polytropen Verteilung $p = \kappa \rho^\gamma$ ergibt sie die Instabilität des Systems, wenn $\gamma < \frac{4}{3}$ ist.

Heckmann (Göttingen).

Tolman, Richard C.: On the stability of stellar models, with remarks on the origin of novae. *Astrophys. J.* **90**, 568—600 (1939).

Die Überlegungen der vorangehenden Arbeit werden verallgemeinert, indem die Voraussetzung $p = p(\rho)$ ersetzt wird durch $p = p(m, \rho)$ (Bezeichnung wie oben). Dann ist die mechanische potentielle Energie pro Masseneinheit u nicht mehr wie vorher gegeben durch $u = \int_0^\rho p(\rho) d\rho/\rho^2$, sondern durch $\int_0^\rho p(m, \rho) d\rho/\rho^2$, so daß u

nicht allein von r und m' abhängt (vermöge der oberen Grenze des Integrals), sondern auch von m . Wieder sind alle Bedingungen für das Minimum außer der Jacobischen trivialerweise erfüllt. Die Jacobische wird ausführlich diskutiert. Der Fall starker Konvektion führt auf die einfachen Betrachtungen der vorangehenden Arbeit zurück; der Fall reinen Strahlungstransports wird durch die formal vereinfachenden Annahmen $\partial p/\partial \rho = \gamma_A p/\rho$, $dp/d\rho = \gamma_R p/\rho$, wo γ_A und γ_R als konstant angenommen werden (aus physikalischen Gründen $\gamma_A < \gamma_R$), der expliziten Behandlung zugänglich. Resultat: In den Fällen reiner Konvektion und reinen Strahlungstransports tritt Instabilität nicht auf gegenüber kleinen instantanen Schwankungen in der Verteilung der

Materie, solange $\gamma_R < \frac{4}{3}$. Der Fall von Konvektionszonen wird qualitativ diskutiert ohne die Voraussetzung der Konstanz von γ_A und γ_R : Nun kann in gewissen Fällen Instabilität auftreten. Zum Schluß Anwendung auf die Frage nach dem Ursprung der Novae. Heckmann (Göttingen).

Lvoff, N.: On the mass-luminosity relation. Astron. J. Soviet Union 16, Nr 5, 17—20 u. engl. Zusammenfassung 21 (1939) [Russisch].

Verf. geht von den Untersuchungen Eddingtons über die Massenhelligkeitsbeziehung aus und versucht an Hand von neuem Material kleine Korrekturen anzubringen, die sich aber als unbedeutend erweisen. Hubert Slouka (Prag).

Parenago, P. P.: The generalized mass-luminosity relation. Astron. J. Soviet Union 16, Nr 6, 7—13 u. engl. Zusammenfassung 14 (1939) [Russisch].

Gleissberg, W.: A new general theorem on the pressure in the interior of the stars. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, N. s. 4, 234—238 (1939).

Sei $M = M(r)$ die Masse innerhalb des Radius r im Stern, M_1 die Gesamtmasse, $P = P(r)$ der Druck, $P_c = P(0)$ der Zentraldruck $= \bar{P}^{(0)}$,

$$\bar{P}^{(n)} = \frac{1}{M^n} \int_0^{M^n} P d(M^n), \quad \bar{P}_1^{(n)} = \frac{1}{M_1^n} \int_0^{M_1^n} P d(M^n), \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

dann gilt folgender Satz: Für jede Konfiguration im mechanischen Gleichgewicht, in welcher die mittlere Dichte $\bar{\rho}$ nach außen abnimmt, nehmen die Funktionen $M^{-\frac{1}{3}}(\bar{P}^{(n)} - P)$ und $M^{-\frac{1}{3}}(\bar{P}^{(n)} - \bar{P}^{(n+1)})$ ebenfalls nach außen ab, und es ist

$$M^{-\frac{1}{3}}(P_c - P) - M_1^{-\frac{1}{3}}P_c > M^{-\frac{1}{3}}(\bar{P}^{(1)} - P) - M_1^{-\frac{1}{3}}\bar{P}_1^{(1)} > M^{-\frac{1}{3}}(\bar{P}^{(2)} - P) - M_1^{-\frac{1}{3}}\bar{P}_1^{(2)} > \dots > 0.$$

Heckmann (Göttingen).

Struve, Otto: The opacity of extended stellar atmospheres. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 26, 117—122 (1940).

Vorontsov-Velyaminov, B.: On the possibility of testing the expansion theory of novae by the absorption line contours. (Studies on the O-class stars, planetary nebulae and novae. XIII.) Astron. J. Soviet Union 17, 29—35 (1940).

Die beobachteten Konturen von Absorptionslinien in neuen Sternen lassen sich bei Annahme der Expansionstheorie nicht durch eine zusätzliche Randverdunklung verständlich machen. Heckmann (Göttingen).

Hoyle, F., and R. A. Lyttleton: The evolution of the stars. Proc. Cambridge Philos. Soc. 35, 592—609 (1939).

Verf. untersuchen, inwieweit die Entwicklung der Sterne durch Massenaufnahme aus einem interstellaren Medium beeinflusst wird. Ohne Massengewinn aus dem interstellaren Raum und ohne die Annahme starker Energiequellen im Innern der Sterne würde die Energieausstrahlung bei einigen Riesensternen eine kurze Lebensdauer zur Folge haben (V Puppis $3 \cdot 10^8$ Jahre). Wie bereits Eddington ausgerechnet hat, ist der Massengewinn eines Sternes

durch direkte Stöße auftreffender Teilchen in der Zeiteinheit $\frac{dM}{dt} = 2\pi\gamma\varrho \frac{MR}{v}$. (M Sternmasse,

R Radius, γ Gravitationskonstante, ϱ Teilchendichte, v Sternengeschwindigkeit relativ zur Wolke.) Danach kann bei den meisten Sternen die Ausstrahlung durch eine Massenaufnahme erst gedeckt werden, wenn die Dichte der Wolke $\varrho > 10^{-21}$ g/cm³ ist. Verf. weisen darauf hin, daß auch die in Hyperbelbahnen um den Stern geführten Teilchen durch unelastische Stöße zur Ruhe kommen können und von dem Stern eingefangen werden. Nach ihrer Abschätzung soll alle Materie bis zu derjenigen Entfernung vom Stern, „in der die Geschwindigkeit des Sternes relativ zu der Wolke die parabolische Geschwindigkeit ist“, eingefangen werden.

Danach ist der Massengewinn pro Zeiteinheit $\frac{dM}{dt} = 4\pi\gamma^2\varrho \frac{M^2}{v^3}$. Ein Stern von 6 Sonnen-

massen, der sich mit der Geschwindigkeit $v = 4$ km/sec durch eine Wolke der Dichte $\varrho = 2 \cdot 10^{-23}$ g/cm³ bewegt, sollte seine Masse in $5 \cdot 10^{10}$ Jahren verdoppeln. Dabei kommen Verf. zu dem Schluß, daß „the evolution of the stars is governed almost entirely by their velocities relative to the cosmical cloud“. Schließlich werden noch Folgerungen der Massenaufsammlung auf die Entwicklung der Doppelsterne erörtert. — Die sich aus den Abschätzungen

ergebenden Aussagen gründen sich auf die Behauptung, daß 1. sämtliche Materie innerhalb einer bestimmten Grenzgeschwindigkeit in der Umgebung eines Sternes unelastische Stöße erleidet, 2. die Teilchen dabei zur Ruhe kommen und 3. die zur Ruhe gekommenen Teilchen auf den Stern stürzen. Es bleiben alle nichtmechanischen Phänomene, wie Strahlungserscheinungen usw., die in der Sternumgebung eine wesentliche Rolle spielen, unberücksichtigt. (Die Behauptungen 1. und 2. entbehren eines genügenden Beweises; im allgemeinen wird bei einem Zusammenstoß nicht $v = 0$ relativ zu dem Stern erreicht; d. Ref.) *W. Fricke.*

Greenstein, Jesse L.: Magnitudes and colors in the globular cluster Messier 4. *Astrophys. J.* **90**, 387—413 (1939).

Miyamoto, Shōtarō: Cyclic equations for O III and electron temperature of gaseous nebulae. *Mem. Coll. Sci. Kyoto A* **22**, 249—257 (1939).

Schalén, Carl: Die dunkle Materie im Sternsystem. *Naturwiss.* **28**, 81—88 (1940).

Parento, P. P.: The galactic orbit of the sun. *Astron. J. Soviet Union* **16**, Nr 4, 18—24 u. engl. Zusammenfassung 24 (1939) [Russisch].

Verf. berechnet die galaktische Bahn der Sonne um das Milchstraßenzentrum unter der Annahme, daß die Masse der Milchstraße vollständig in jenem Zentrum vereinigt ist, und erhält die Elemente einer elliptischen (oskulierenden) Bahn mit der großen Halbachse von 10900 Parsec, der Bahnexzentrizität 0,30 und einer Umlaufzeit von 326 Millionen Jahren. Für die Gegenwart wird der Abstand vom Milchstraßenzentrum zu 7800 Parsec, die Bahngeschwindigkeit zu 275 km/sec angegeben. *Walter.*

Camm, G. L.: The Sun's speed of galactic rotation determined from the globular clusters. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **100**, 45—50 (1939).

Es wird gezeigt, daß der gewöhnlich zu 275—300 km/sec angenommene Wert für die Rotationsgeschwindigkeit der Sonne relativ zum System der Kugelhaufen wesentlich von der Voraussetzung abhängt, daß im Kugelhaufensystem selbst keine differentielle Rotation vorhanden ist. Indem Verf. diese Voraussetzung fallen läßt, findet er für die Rotationsgeschwindigkeit der Sonne relativ zu den am weitesten ($26-38 \cdot 10^3$ pcs) vom galaktischen Zentrum entfernten Kugelhaufen seines Materials den Betrag 410 ± 50 km/sec. *Straßl (Göttingen).*

Bok, Bart J.: Galactic density gradients. *Astrophys. J.* **90**, 249—270 (1939).

Mit Hilfe von zum Teil veröffentlichtem, zum Teil noch unveröffentlichtem, aus verschiedenen Quellen stammendem Material an Sternzählungen, Farbenindizes, photographischen Helligkeiten und Spektren früher Typen wird versucht, für zwei ausgewählte Gebiete der Milchstraße den Verlauf der räumlichen Dichte dieser Typen zu ermitteln. Dabei wird die interstellare Absorption und ihr Gang mit der Entfernung in Rechnung gestellt; ihre Beträge für verschiedene Felder und Spektralunterklassen werden aus den Farbezessen erschlossen. Im ersten Gebiet (Monoceros) weist keine auffällige Anomalie der Sternverteilung auf lokale Absorption hin; trotzdem ergibt sich aus den Farbezessen, daß eine solche vorhanden ist und bis zu 1500 pcs zunimmt. Die bis etwa 800 pcs Abstand von der Sonne ermittelte Dichte der B8—A5-Sterne nimmt mit der Entfernung stärker ab als der Dichteabfall der Gesamtheit aller Sterne. Im zweiten Gebiet (Cepheus und Cassiopeia, vertreten durch 4 Selected Areas) sind lokale Verdunklungen seit langem bekannt; durch die örtlich schwankender Farbezesse werden sie bestätigt. Die Dichte der Typen B0—A9 nimmt hier nach außen etwa in dem gleichen Maße ab wie die der Stern Gesamtheit. *Strassl (Göttingen).*

Stebbins, Joel, C. M. Huffer and A. E. Whitford: Space reddening in the galaxy. *Astrophys. J.* **90**, 209—229 (1939).

Durch Bestimmung photoelektrischer Farbenindizes Blau (4170 Å)-Gelb (4710 Å) ist ein früher gewonnenes Material von 733 B-Sternen auf 1332 erweitert worden. Spektralphotometrische Messungen an ausgewählten B-Sternen bestätigen den für $4500 < \lambda < 9000$ Å linearen Gang des Farbezesses E mit $1/\lambda$, woraus die visuelle Gesamtabsorption zu $7E$, die photographische zu $9E$ folgt. Danach sind die bisherigen Werte der absoluten Helligkeiten der frühen B-Sterne um etwa 1^m zu erhöhen.

Die Korrelation zwischen E und einigen interstellaren Linien ist ungefähr ebenso groß wie die Korrelation zwischen den verschiedenen Linien selbst. Große Farbexzesse finden sich hauptsächlich in der Nähe des galaktischen Äquators, in der Richtung zum Systemzentrum häufiger als in der Gegenrichtung. Auch die hellsten Milchstraßengebiete sind durch Absorption beeinflusst. Die Verteilung der absorbierenden Materie in der galaktischen Ebene ist so unregelmäßig, daß man von einer gleichmäßigen Schicht mit konstantem Absorptionskoeffizienten nicht mehr sprechen kann. *Strassl*.

Stebbins, Joel, C. M. Huffer and A. E. Whitford: The colors of 1332 B stars. *Astrophys. J.* **91**, 20—50 (1940).

Durch photoelektrische Messungen auf den Observatorien Madison und Mt. Wilson sind die Farbenindizes Blau-Gelb von 1332 Sternen der Typen O—B5 ermittelt worden. Auf jeden Stern entfallen durchschnittlich 2,5 Beobachtungen. Die Arbeit bringt einen vollständigen Katalog dieses Materials, das nahezu alle O—B5-Sterne nördlich von -15° Dekl. mit $m_{\text{vis.}} \leq 7^{\text{m}},5$ und nahezu alle O—B2-Sterne nördlich von -40° bis zur Grenzgröße des Draperkataloges umfaßt. Der wahrsch. F. der Kataloggrößen wird zu $\pm 0^{\text{m}},02$ bis $0^{\text{m}},03$ für Madison und zu $\pm 0^{\text{m}},01$ bis $0^{\text{m}},02$ für Mt. Wilson angegeben. Um die Farbenindizes auf die internationale Skala umzurechnen, hat man sie mit 1,50 zu multiplizieren. Betreffs Auswertung des Materials vgl. vorsteh. Ref. *Strassl* (Göttingen).

Payne-Gaposchkin, Cecilia: Red indices in southern selected areas. *Astrophys. J.* **90**, 321—351 (1939).

Wilson, Ralph E.: Proper motions and mean absolute magnitudes of class N stars. *Astrophys. J.* **90**, 352—367 (1939).

Aus Eigenbewegungen von 106 N-Sternen, bei denen der wahrsch. F. der E.B. $0'',015$ nicht übersteigt, wird die mittlere Parallaxe abgeleitet. Aus den paralaktischen Komponenten folgt $\bar{\pi}_q = 0'',00118 \pm 15$, aus den transversalen $\bar{\pi}_r = 0'',00194 \pm 11$ (wahrsch. F.). Beide Werte werden zum Mittelwert $0'',00166 \pm 16$ vereinigt, dem $\bar{M} = -1^{\text{m}},84 \pm 0,20$ entspricht. Dieser Betrag paßt gut zu den Ergebnissen anderweitiger, auf Radialgeschwindigkeiten beruhender Untersuchungen, wenn man die galaktische Absorption zu $0^{\text{m}},2/\text{kpc}$ annimmt. Bei Einteilung der N-Sterne nach Spektralunterklassen oder Lichtkurvencharakter scheint \bar{M} nicht stark zu variieren. *Strassl* (Göttingen).

Wilson, Ralph E.: The mean absolute magnitude of class-R stars. *Astrophys. J.* **90**, 486—493 (1939).

Aus den Radialgeschwindigkeiten von 37 und den Eigenbewegungen von 28 R-Sternen ergibt sich für letztere die mittlere Parallaxe $\bar{\pi} = 0'',00180 \pm 18$ (wahrsch. F.). Die mittlere absolute Helligkeit der Klasse R wird $\bar{M} = -0^{\text{m}},50 \pm 0,20$ (wahrsch. F.); sie scheint zwischen R0—R4 und R5—R9 keinen Unterschied aufzuweisen. *Strassl* (Göttingen).

Shapley, Harlow: Galactic and extragalactic studies. II. Notes on the peculiar stellar systems in Sculptor and Fornax. *Proc. nat. Acad. Sci. Wash.* **25**, 565—569 (1939).

Die Nachprüfung zahlreicher Aufnahmen hat keine weiteren Gebilde von der Art der in Harvard Coll. Observ. Bull. 1938, 908 vom Verf. angezeigten neuen Sternsysteme in Sculptor und Fornax ergeben. Doch sind nahe dem Zentrum und dem Südrand des Fornaxsystems je ein Kugelhaufen gefunden worden. Außerdem sind sowohl in Sculptor wie in Fornax je ein System von der Art der Magellanwolke festgestellt worden. Einige die Ausdehnung und die Helligkeit dieser Systeme kennzeichnende Zahlen werden mitgeteilt. *Strassl*.

Smart, W. M.: The Scorpio-Centaurus cluster (the southern stream). *Monthly Roy. Astron. Soc.* **100**, 60—85 (1939).

Die kinematischen Bestimmungsgrößen der als Scorpio-Centaurus-Haufen bekannten Sternsamtheit werden einer eingehenden Analyse unterworfen. Der Konvergenzpunkt (äquatoriale Koordinaten $A = 91^\circ$, $D = -37^\circ$) stimmt mit dem Antiapex der Sonnenbewegung, die „Strom“-Geschwindigkeit (18,8 km/sec) mit der

Sonnengeschwindigkeit überein. Die mit Rücksicht auf K -Effekt und differentielle galaktische Rotation diskutierten Differenzen zwischen den hieraus berechneten und den beobachteten individuellen Radialgeschwindigkeiten der einzelnen Sterne sind von derselben Größenordnung wie bei Sternengesamtheiten, die keinen Bewegungshaufen bilden. Ein eigentlicher Scorpio-Centaurus-„Haufen“ besteht also nicht. *Strassl.*

Smart, W. M., and T. R. Tannahill: The constants of the star-streams from the Cape photographic proper motions of 18,323 stars. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **100**, 30—44 (1939).

Auswertung der Eigenbewegungen von 18323 Sternen der Cap-Zone $-42^\circ < \delta < -52^\circ$ nach den Gesichtspunkten der Zwei-Strom-Theorie. Die Konstanten der beiden Driften und die Vertexkoordinaten werden zahlenmäßig bestimmt und auch auf die Konstanten der Ellipsoidtheorie umgerechnet. Vergleich mit den Resultaten anderer Forscher. *Strassl.*

Parénago, P. P.: The distribution of visual binary stars according to their periods. *Astron. J. Soviet Union* **16**, Nr 5, 1—15 u. engl. Zusammenfassung 15—16 (1939) [Russisch].

Verf. stellt sich als Aufgabe, die Verteilung von visuellen Doppelsternen nach ihren Perioden in einer bestimmten Raumeinheit zu bestimmen. Es werden 1585 Doppelsterne untersucht, bei welchen der Hauptstern $7^m,0$ oder heller ist, und ihre Periode wird aus der Formel $\lg P = 1,554 + 1,51 \lg q + 0,3 (m_1 - M_1) - 0,5 \lg (M_1 + M_2)$ berechnet. Für 930 Sterne, d. i. 59% der Gesamtzahl der Doppelsterne wurden die absoluten Größen M_1 aus dem Parallaxenkatalog des Sternbergischen Astronomischen Instituts in Moskau entnommen, M_1 der übrigen 655 Sterne wurde aus m_1 , dem Spektrum und der Eigenbewegung bestimmt. In einer groß angelegten Tafel gibt der Verf. die Verteilung nach $\lg P$ und M_1 , in einer anderen sind die korrigierten Anzahlen von Doppelsternen verschiedener $\lg P$ und M_1 in einem Rauminhalt von einer Million Kubikparsec angegeben. Es zeigt sich, daß die Verteilung $\lg P$ annähernd durch die Gaußsche Fehlerkurve mit dem Maximum bei $\lg P = 2,81$ dargestellt wird, wobei die Dispersion $\sigma = +1,15$ ist. Man kann keinen Gleichgewichtszustand im galaktischen System nach diesen Resultaten erwarten. Die Verteilung von Doppelsternen nach verschiedenen absoluten Größen zeigt, daß Supergiganten 15%, Riesen 8% und Zwerge 20—50% an Doppelsternen zeigen. Da 35% aller Sonnensterne Doppelsterne sind, so ist wahrscheinlich, daß auch unsere Sonne ehemals ein Doppelstern gewesen ist.

Hubert Slouka (Prag).

Vallarta, M. S.: Remarks on Zwicky's paper „on the formation of clusters of nebulae and the cosmological time scale“. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **26**, 116—117 (1940).

Jordan, P.: Bemerkungen zur Kosmologie. *Ann. Physik*, V. F. **36**, 64—70 (1939).

Nach Diracs Vorschlag (dies. Zbl. **18**, 288) sind die großen dimensionslosen Zahlen der Physik als Funktionen des Weltalters anzusehen. Jordan nimmt darüber hinaus noch an: Die Weltgeometrie ist riemannisch (integrable Längenübertragung), die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante, das Verhältnis der Protonenmasse zur Elektronenmasse und die Kernbindungskräfte sind kosmologische Konstanten. Die aus der relativistischen Gravitationskonstanten κ und der mittleren Massendichte μ des Weltalls gebildeten Größen $R = (\kappa\mu)^{-1/2}$, $M = (\kappa^3\mu)^{-1/2}$ deutet er als Radius und Masse des Weltalls, das er als geschlossen annimmt. Dann wird M proportional γ^2 , wo $\gamma = R \cdot e^2/(m_0 c^2)$, wächst also mit der Zeit an. Als Ursache dieser Massenzunahme vermutet J. explosionsartige Entstehung von Sternen.

K. Bechert (Gießen).

Ambarzumian, V. A.: On the gravitational potential energy of open clusters. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. **24**, 874—876 (1939).

Jehle, Herbert: Kosmologische Wellenmechanik. IV. *Z. Astrophys.* **19**, 225—235 (1940).

Verf. führt aus, daß die Annahmen, die seiner kosmologischen Wellenmechanik zugrunde liegen, der beobachteten Struktur der Sternenwelt nicht widersprechen. Es handelt sich um eine Art Hydrodynamik der Sternbewegungen mit Zusatzbedingungen (s. dies. Zbl. **18**, 287; **21**, 78; **22**, 96); die Zusatzbedingungen sind in der Hydrodynamik im allgemeinen nicht erfüllt, bei den Sternbewegungen nach Ansicht des Verf. aber wohl.

Bechert (Gießen).